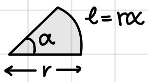
Analisi I

A.A. 2022-2023

SIMONE SACCANI

Avvertenze

- $\log x = \ln x = \log_e x$
- angoli sempre in radianti



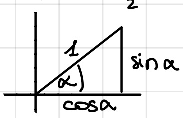
area $= \frac{r^2 \alpha}{2}$

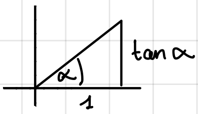
$f(x) = \sin x = \sin(\alpha \cdot \frac{180°}{\pi})$ (x in gradi) $\quad f'(x) = \frac{180°}{\pi} \cos(\alpha \cdot \frac{180°}{\pi}) = \frac{180°}{\pi} \cos x$

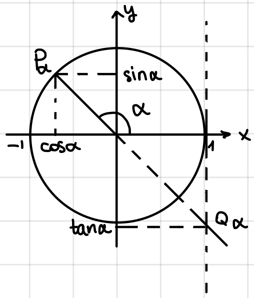
- e^x
- $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$ n pari : radice positiva
  definita solo per $x \geq 0$

eccezione : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- a^b :
  - $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ volte}}$ n intero positivo, $a \in \mathbb{R}$
    $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ n intero positivo, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$
    $a^0 = 1$ per $a \neq 0$
  - $a^b = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ per n intero ($n \in \mathbb{Z}$), m intero positivo, $a \geq 0$ (se $n > 0$) o $a > 0$ (se $n < 0$)
    $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ $\qquad (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$
  - $a^b = ?$ si calcola per approssimazione / come limite per $b > 0, a \geq 0 \vee b \leq 0, a > 0$
- $a^b = e^{b \log a}$
- trigonometria : nozioni di base $\quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

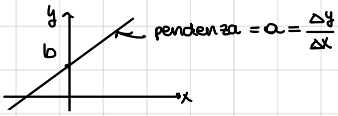




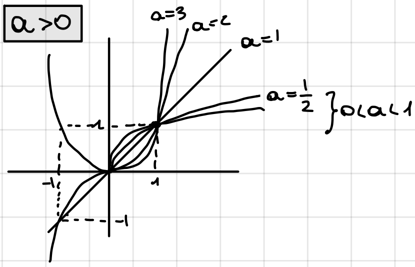


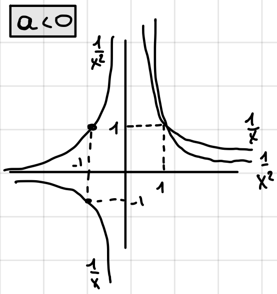
Funzioni elementari

- $f(x) = ax + b$

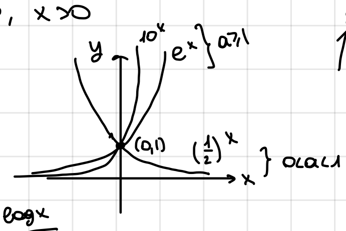


- $f(x) = x^a$
  $a = 1, 2, \dots$ x qual.
  $a = 0, -1, \dots$ $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
  a reale non intero > 0, $x \geq 0$
  a reale non intero ≤ 0, $x > 0$

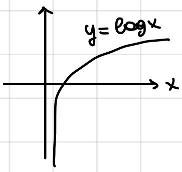




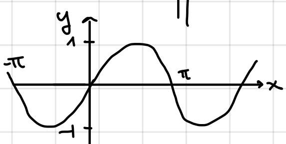
- $f(x) = a^x$ $\quad a > 0$, x qual



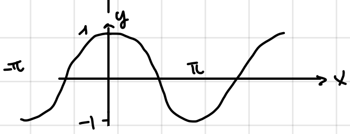
- $f(x) = \log x$ $\quad x > 0$



- $f(x) = \sin x$

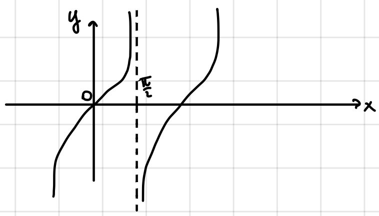


$f(x) = \cos x$



$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$f(x) = \tan x$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



Operazioni sui grafici

$f(x) \rightsquigarrow$

- $f(x)+c$: "traslazione verticale verso l'alto"
- $f(x+c)$: "traslazione orizzontale verso sinistra"
- $cf(x)$ $(c>1)$: "dilatazione verticale" — $cf(x)$ $(c<1)$: "contrazione verticale"
- $f(cx)$ $(c>1)$: "contrazione orizzontale" — $f(cx)$ $(c<1)$: "dilatazione orizzontale"
- $-f(x)$: simmetria rispetto all'asse x
- $f(-x)$: simmetria rispetto all'asse y — $-f(-x)$: riflessione rispetto all'origine
- $|f(x)|$: — $f(|x|)$

Teoria degli insiemi

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}=\{$numeri reali$\}$

$\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathbb{R}^d=\{(x_1,x_2,\dots,x_d) \mid x_1,x_2,\dots,x_d \in \mathbb{R}\}$

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ $\quad$ $(a,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ $\quad$ $[a,b)$, $(a,b]$

$[a,+\infty):=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$ $\quad$ $(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$

Funzioni

Def. Informale Dati due insiemi $X,Y \subset \mathbb{R}$

Una funzione f da X in Y è una "procedura" che ad ogni $x\in X$ associa $f(x)\in Y$

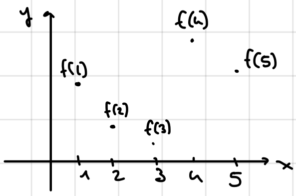
$\left.\begin{matrix} x^2-1 \\ (x+1)(x-1) \end{matrix}\right\}$ danno lo stesso risultato $\forall x$ e definiscono la stessa funzione

Def. Una funzione f da X in Y è un insieme $\Gamma \subset X\times Y$ (grafico) tale che per ogni $x\in X$ esiste un unico $f(x)=y\in Y$ tale che $(x,y)\in\Gamma$ (e per ogni $(x,y)\in\Gamma$, vale $x\in X$)

esempio $X:=\{1,2,\dots,5\}$, $Y=\mathbb{R}$

1	2	3	4	5
$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$

$(1,f(1)),\ (2,f(2)),\ (3,f(3)),\ (4,f(4)),\ (5,f(5))$



$X,Y\subset\mathbb{R}$

$f: X \to Y$ — X: dominio di f; Y: codominio

$\mathrm{Im}(f):=\{f(x) \mid x\in X\} \subset Y$ — immagine di f

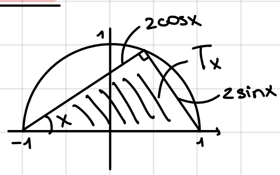
Dato $E\subset X$ $\quad f(E):=\{f(x) \mid x\in E\}$

$\mathrm{Im}(f)=f(X)$

In questo caso:
- $X\subset\mathbb{R}$ sempre
- $Y\subset\mathbb{R}$ quasi sempre (talvolta $Y\subset\mathbb{R}^d$)
- f è data da una formula

Insieme di definizione di una formula è l'insieme degli x per cui la formula ha senso

esempio



$f(x):=\text{area}(T_x)=2\cos x\sin x=\sin 2x$

Dominio di $f=[0,\frac{\pi}{2}]$

Def. $f(x)$ è **periodica** di periodo T
se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$

Def. Data $f: X \to Y$
f si dice **iniettiva** se dati $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

Def. Data $f: X \to Y$
f si dice **surgettiva** se $Im(f) = Y$

Def. Data $f: X \to Y$ $\alpha(,\dots)\}$
f si dice **bigettiva** se f è sia iniettiva che surgettiva

Graficamente

- f è iniettiva se qualsiasi retta orizzontale interseca il suo grafico al più una volta
- f è surgettiva se qualsiasi retta orizzontale interseca il suo grafico almeno una volta

Def. Data $f: X \to Y$, con $X, Y \subset \mathbb{R}$
Una funzione $g: Y \to X$ si dice **inversa** di f (e viceversa) se

$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

esempio Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data $f(x) := x^3$
Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data $g(y) = \sqrt[3]{y}$
Allora f è un'inversa di g e viceversa

Proposizione Data $f: X \to Y$
① L'inversa (se esiste) è unica (e viene indicata con f^{-1})
② L'inversa esiste se e solo se f è bigettiva

DIMOSTRAZIONE

① Procedo per assurdo. Suppongo f abbia due inverse, g_1 e g_2.
$\forall y \in Y$, si ha $f(g_1(y)) = y$ e $f(g_2(y)) = y \Rightarrow f(g_1(y)) = f(g_2(y)) \Rightarrow g_1 = g_2$ poiché f è iniettiva.

② L'inversa di f esiste $\Leftrightarrow$ f è bigettiva

$\Rightarrow$: Hp: esiste g inversa di f Ts: f è iniettiva e surgettiva
Dati $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ iniettiva
Dato $y \in Y$, allora $f(g(y)) = y$, cioè $y = f(x)$ con $x = g(y) \Rightarrow f$ surgettiva

$\Leftarrow$: Hp: f bigettiva Ts: esiste g inversa
Prendo $y \in Y$. So che $\exists! x$ t.c. $f(x) = y$
Pongo $g(y) = x$
Sostituendo nella prima: $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$
Sostituendo nella seconda: $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
Perciò g è l'inversa di f. □

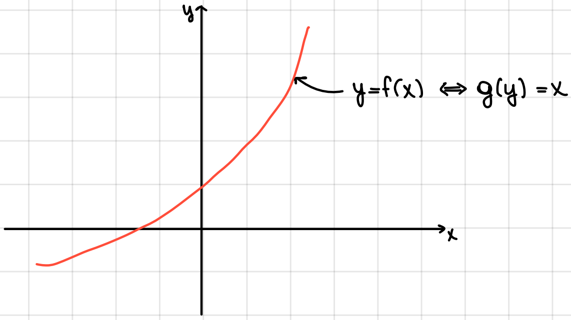
Nota Se gli insiemi sono finiti, l'inversa esiste se e solo se $|X| = |Y|$

funzione f		inversa g	
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = x$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g(y) = y$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g(y) = \sqrt[3]{y}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	non esiste	
$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$	$f(x) = e^x$	$g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$	$g(y) = \log y$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	non esiste	
$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$	$f(x) = x^2$	non esiste	
$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$	$f(x) = x^2$	$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$	$g(y) = \sqrt{y}$
$f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$	$f(x) = x^2$	$g: [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$	$g(y) = -\sqrt{y}$

Grafico dell'inversa

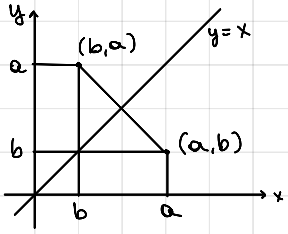
$f: X \to Y$

$g: Y \to X$



Il grafico $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ è uguale a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = g(y)\}$

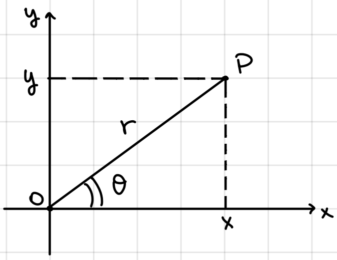
e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = g(x)\}$ si ottiene riflettendo Γ rispetto alla retta $y=x$ (bisettrice I quadr.)



$$\frac{1}{2}\left((a,b) + (b,a)\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

funzione f		inversa g	
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	non esiste	
$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$	$f(x) = \sin x$	non esiste	
$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$	$f(x) = \sin x$	$g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$g(y) = \arcsin y$
$f: [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \to [-1,1]$	$f(x) = \sin x$	$g: [-1,1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$	$g(y) = \pi - \arcsin y$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	non esiste	
$f: [0,\pi] \to [-1,1]$	$f(x) = \cos x$	$g: [-1,1] \to [0,\pi]$	$g(y) = \arccos y$
$f: [-\pi, 0] \to [-1,1]$	$f(x) = \cos x$	$g: [-1,1] \to [-\pi, 0]$	$g(y) = -\arccos y$
$f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \tan x$	non esiste	
$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	$f(x) = \tan x$	$g: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$g(y) = \arctan y$

coordinate polari



(x,y) coordinate cartesiane di P

(r,θ) coordinate polari di P (definite per $P \neq O$)

POLARI → CARTESIANE

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

CARTESIANE → POLARI

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0, y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Def. Date f, g

$$g \circ f\,(x) := g(f(x))$$

LIMITI (CALCOLO)

Data $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$

DEF. Data f e $x_0 \in X$, f si dice continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ (def. non effettiva)

oss. 1 $\exists \delta \, \cancel{\forall \varepsilon}$

oss. 2 Se si sostituisce $\leq$ con $<$, non cambia nulla

oss. 3 "ε sufficientemente piccolo"

DEF. $f: X \to \mathbb{R}$ si dice continua se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Q1 Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) := \frac{1}{x}$

f è continua? sì

Q2 Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ allora
- ☒ f è continua
- ☐ f non è continua
- ☐ non ha senso la domanda
- ☐ dipende da f

Q3 Sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua, allora $\forall x_0 \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ t.c. ...

Trovare esempio di f per cui δ deve dipendere da x_0

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^x$ $\qquad$ $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ NO $\qquad$ $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x^2)$

OSS Tutte le funzioni elementari sono continue (tranne $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$)

OSS Somma, prodotto, composizione di funzioni continue è continua

$f: X \to \mathbb{R}$

X = unione finita di intervalli I_i $(i = 1, \dots, n)$ con estremi $a_i < b_i$

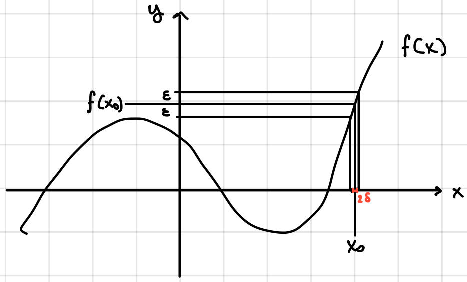
DEF. $\overline{X}$ = chiusura di X = unione I_i più estremi, se finiti

DEF. $\sup X$ = il più grande dei $b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

se $\sup X \in X$ lo chiamo massimo

DEF. $\inf X$ = il più piccolo degli $a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

se $\inf X \in X$ lo chiamo minimo



Data $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X$ come sopra

DEF. Dato $x_0 \in \overline{X}$ e $L \in \mathbb{R}$, dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (o anche $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$)

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$ con $x \in X$, $x \neq x_0$

OSS Se $x_0 \in X$, allora f è continua in x_0 sse $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

DEF. Dato $x_0 \in \overline{X}$, dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

se $\forall M \quad \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M \qquad x \in X, x \neq x_0$

DEF. Dato $x_0 \in \overline{X}$, dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

se $\forall M \quad \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq M \qquad x \in X, x \neq x_0$

DEF. Sia $\sup X = +\infty$, dico che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \qquad x \in X$

DEF. Sia $\sup X = +\infty$, dico che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

se $\forall c \quad \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \geq M \Rightarrow f(x) \geq c \qquad x \in X$

DEF. Sia $\sup X = +\infty$, dico che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

se $\forall c \quad \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \geq M \Rightarrow f(x) \leq c \qquad x \in X$

Def. Sia $\inf X = -\infty$, dico che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$
se $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \le M \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon \qquad x \in X$

Def. Sia $\inf X = -\infty$, dico che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
se $\forall c\ \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \le M \Rightarrow f(x) \ge c \qquad x \in X$

Def. Sia $\inf X = -\infty$, dico che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
se $\forall c\ \exists M = M(\varepsilon)$ t.c. $x \le M \Rightarrow f(x) \le c \qquad x \in X$

Th. Le funzioni elementari $|x|$, x^a, a^x $(a>0)$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ sono continue sul loro insieme di definizione

Th. Date $f, g : X \to \mathbb{R}$, continue in $x_0 \in X$ allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_0.

cor. Date $f, g : X \to \mathbb{R}$ continue, $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue

Th. Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, con f continua in $x_0 \in X$ e g continua in $y_0 := f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0

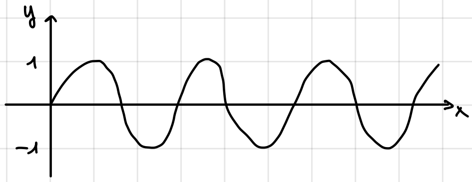
Def. $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$ (oppure $x_0 = \pm\infty$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} L & \text{numero reale} \\ +\infty & \\ -\infty & \\ \text{NON ESISTE} & \end{cases}$$

o non ha senso

Th. Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, se esiste, è unico

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ NON ESISTE



Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$, x_0
e dato $L \in \mathbb{R}$, si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ $\left(f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L \right)$
se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta] \cap X \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon$

Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$, x_0
e dato $L \in \mathbb{R}$, si dice che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ $\left(f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} L \right)$
se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $x_0 \in [x_0 - \delta, x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon$

calcolo dei limiti

1) $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y \to y_0} g(y)$

<u>Hp:</u> so che $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y_0$ & $\lim_{y \to y_0} g(y)$ esiste & se $y_0 \in \operatorname{dom}(g)$ allora g è continua in y_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$

$f: X\to\mathbb{R}$ $\quad g: X\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{X}$

Esistono finiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$

L finito "$+\infty + L = +\infty$" $\quad$ "$-\infty + L = -\infty$"

"$+\infty+\infty = +\infty$" $\quad$ "$-\infty-\infty = -\infty$"

FORMA INDETERMINATA $[+\infty - \infty]$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$f: X\to\mathbb{R}$ $\quad g: X\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{X}$

Esistono finiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$

$L>0$ "$+\infty\cdot L = +\infty$" $\quad$ "$-\infty\cdot L = -\infty$"

$L<0$ "$+\infty\cdot L = -\infty$" $\quad$ "$-\infty\cdot L = +\infty$"

FORMA INDETERMINATA $[0\cdot\pm\infty]$

Th. confronto

Hp. $f, g, h : X\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{X}$

$\forall x\in X \quad f(x)\le g(x)\le h(x)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$

Ts. $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$

OSS $\quad L=+\infty$ basta $f(x)\le g(x)$

$L=-\infty$ basta $g(x)\le h(x)$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : |x-x_0|\le\delta \Rightarrow |f(x)-L|\le\varepsilon$, $x\in X$, $x\ne x_0$

$\lim_{x\to x_0} h(x) = L \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : |x-x_0|\le\delta \Rightarrow |h(x)-L|\le\varepsilon$, $x\in X$, $x\ne x_0$

$\Rightarrow L-\varepsilon\le f(x)\le L+\varepsilon$ e $L-\varepsilon\le h(x)\le L+\varepsilon$

$\Rightarrow L-\varepsilon\le f(x)\le g(x)\le h(x)\le L+\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon\le g(x)\le L+\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L$ $\square$

esempio $\quad \lim_{x\to+\infty} \sin x + x = +\infty$ poiché $x-1\le\sin x + x\le x+1$

esempio $\quad \lim_{x\to+\infty} \cos x\cdot\frac{1}{x^3} = 0$ poiché $-\frac{1}{x^3}\le\cos x\cdot\frac{1}{x^3}\le\frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

OSS. Se il dom(f) è X, allora il dom$\left(\frac{1}{f}\right)$ non è X, bensì è $Y=\{x\in X \mid f(x)\ne 0\}$

Hp. dom$\left(\frac{1}{f}\right)$ è unione finita di intervalli

Esiste non nullo $\lim_{x\to x_0} f(x)$

esempio $\quad \lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x} = -\infty$

$\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x} = +\infty$

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sin x}$ non esiste

DERIVATE (CALCOLO)

Motivazione geom.

Trovare la pendenza della retta tangente al grafico $y=f(x)$ nel punto x_0

$y=m(x-x_0)+f(x_0)$ prob trovare m

Idea: m = limite della pendenza m_h della retta passante per $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

Siccome $m_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (rapporto incrementale), allora $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Motivazione 2

Definire (calcolare) la velocità all'istante t_0 di un punto in movimento, sapendo $d(t)$ = distanza percorsa dal punto dall'istante iniziale $t=0$ all'istante t.

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{d(t_0+\Delta t) - d(t_0)}{\Delta t}$$

Def. Sia $f: X\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x\in X$, X unione finita di intervalli (ipotesi provvisoria)

La derivata di f in x è $f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (se tale limite esiste)

(come ogni limite, $f'(x)$ può essere finito, essere $\pm\infty$, non esistere)

Dico che f è differenziabile in x se $f'(x)$ esiste ed è finito.

f' è una funzione con dominio $\subset X$

Notaz. alternative f', $\dot{f}$, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Esempio di calcolo (a partire dalla def.)

$f(x) = ax+b$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

$f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

$f(x) = |x|$ $\quad f'(0)$ non esiste $\quad \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ (ma esistono der. dx e der. sx)

calcolo delle derivate (delle funzioni date da una formula)

f	f'
a	0
x^a	$a x^{a-1}$ ($+\infty$ se $x=0$ e $0<a<1$)
e^x	e^x
a^x $(a>0)$	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($+\infty$ se $x=\pm1$)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-\infty$ se $x=\pm1$)
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$$\left[\log_a x \longrightarrow \frac{1}{x \log a}\right]$$

Regole di derivazione

1) $(f+g)' = f' + g'$

caso particolare: $(f+a)' = f'$

Date $f, g: X \to \mathbb{R}$, X "buono", $x \in X$ t.c. $f'(x)$ e $g'(x)$ esistono, allora $(f+g)'(x)$ esiste ed è $f'(x)+g'(x)$

2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

caso particolare $(af)' = af'$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

caso particolare: $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

4) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

caso particolare: $(f(ax))' = af'(x)$

Date $g: X \to Y$ e $f: Y \to \mathbb{R}$, $x \in X$ t.c. $g'(x)$ esiste, $f'(y)$ esiste per $y = g(x)$, allora $(f \cdot g)(x)$ esiste ed è $f'(y) \cdot g'(x)$

<u>esempio</u> $(x^x)' = (e^{x \log x})' = (e^y)' (x \log x)' = e^y (\log x + 1) = x^x (\log x + 1)$

$(\sin(x^2+2x^4))' = (\sin y)' (x^2+2x^4)' = \cos y \ (2x+8x^3) = (2x+8x^3)\cos(x^2+2x^4)$

$(\sqrt{1+x^2})' = ((1+x^2)^{\frac{1}{2}})' = (y^{\frac{1}{2}})' (1+x^2)' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \ (2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Dimostrazioni

1) $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$

Dim già fatta

2) $f(x) = e^x$

Dim $$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x$$

3) $(f+g)' = f' + g'$

Dim $$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{h\to 0 \,:\, \to f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{h\to 0 \,:\, \to g'(x)} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) + g'(x)$$

4) $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

Dim $$\frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = \frac{f(x+h) g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h) g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \underbrace{f(x+h)}_{\downarrow h\to 0 \atop f(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop g'(x)} + g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop f'(x)} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

5) $(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Dim

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ y := f(x) \\ k := f(x+h) - f(x) \\ \downarrow h\to 0 \\ 0}}{=} \underbrace{\frac{g(y+k) - g(y)}{k}}_{\downarrow k\to 0 \atop g'(y)} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop f'(x)}$$

(se f è continua in x)

$$\xrightarrow[h\to 0]{} g'(y)\cdot f'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

6) Derivata della funzione inversa

$f: X \to Y$ $\quad g: Y \to X$ $\quad g$ inversa di f. Dato x t.c. $f'(x)$ esiste finito e $\neq 0$, allora $g'(y)$ esiste $(\Rightarrow \neq \infty)$

ed è $\quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ $\quad$ con $y = f(x)$ cioè $x = g(y)$

Dim $\quad g(f(x)) = x \quad$ derivo $\quad g'(y)\cdot f'(x) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

(incompleta perché assume che g' esista)

7) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Dim $\quad (\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

8) $(a^x)' = a^x \log a$

Dim $\quad a^x = e^{x\log a} \Rightarrow (a^x)' = (e^{x\log a})' = (e^y)' \cdot (x\log a)' = e^y \cdot \log a = a^x \log a$

9) $(x^a)' = a x^{a-1}$

Dim $\quad x>0 : \quad x^a = e^{a\log x} \Rightarrow (x^a)' = (e^{a\log x})' = (e^y)'\cdot(a\log x)' = e^y \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}$

$x=0$: per def. $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = \frac{h^a - 0^a}{h} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } a\in\mathbb{Q} \text{ con denom. dispari (ai min. t.)} \\ \text{non definito} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$x<0$: $(x^a)' = (-1)^a((-x)^a)' = (-1)^a a(-x)^{a-1}$

per $a \in \mathbb{Q}$ con denominatore dispari (ai minimi termini)

Vale	$x>0$	se a reale ≤ 0
	$x\geq 0$	se a reale >0
	$x\in\mathbb{R}$	se a intero >0
	$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	se a intero ≤ 0
	con la convenzione	
	$0^{a-1} = +\infty$	se $0<a<1$

9 bis) $\sqrt[n]{x}$ con n dispari

Dim $\quad x<0$: $$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{(y^n)'} \underset{\substack{\uparrow \\ y<0}}{=} \frac{1}{(-1)^n n(-y)^{n-1}} = -\frac{1}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-1}}}$$

10) $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Dim $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{y}\right)' \cdot f'(x) = -\frac{1}{y^2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

11) $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$

Dim $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \left(g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \cdot \left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$

12) $(\sin x)' = \cos x$

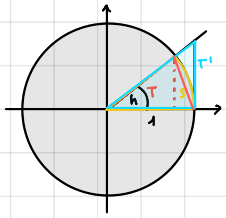
Dim Parto dal rapporto incrementale $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin h \cos x + \cos h \sin x - \sin x}{h} = \underbrace{\frac{\sin h}{h} \cos x - \sin x \frac{1-\cos h}{h}}_{\downarrow h \to 0}$

$1 \cdot \cos x - \sin x \cdot 0 = \cos x$

Lemma 1 $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

Lemma 2 $\frac{1-\cos h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Dim (Lemma 1) $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$



Siccome è pari, basta dimostrare $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 1$

area $T \leq$ area $S \leq$ area T'

$\frac{1}{2} \sin h \leq \frac{1}{2} h \leq \frac{1}{2} \tan h$ per $0 < h < \frac{\pi}{2}$

$\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$

$\underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}}{\cos h} \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$

Per confronto $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

Dim (Lemma 2)

$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h} \cdot \frac{1}{1+\cos h} = \underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}}{\frac{\sin h}{h}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sin h} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1/2}}{\frac{1}{1+\cos h}} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

13) $(\cos x)' = \sin x$

Dim $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = (\sin y)' \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos y \cdot (-1) = -\sin x$

14) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Dim $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Dim $(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

16) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ vale per $-1 < x < 1$ $\quad (\arcsin x)' = +\infty$ se $x = \pm 1$

Dim $(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

17) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \arccos x + \arcsin x = \text{cost}$

Teorema di De L'Hôpital

versione base

Date f,g t.c. $f(x), g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ oppure $f,g \xrightarrow[x\to x_0]{} \pm\infty$
allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

versione precisa

Date f,g come sopra tali che $\begin{cases} f(x), g(x) \longrightarrow 0 \\ \text{opp.} \\ g(x) \longrightarrow \pm\infty \end{cases}$ e $\exists L := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

versione ultra-precisa

L'insieme di definizione X di $\frac{f(x)}{g(x)}$ deve soddisfare che:
$$\exists \delta : (X \cap [x_0-\delta, x_0+\delta]) \cup \{x_0\} = \begin{cases} [x_0-\delta, x_0+\delta] \\ [x_0-\delta, x_0] \\ [x_0, x_0+\delta] \end{cases}$$
ossia X deve essere unione finita di intervalli

DIMOSTRAZIONE

nel caso particolare: x_0 finito, f,g in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ $(f(x_0)=g(x_0)=0)$, $g\neq 0$, $g'(x_0)\neq 0$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)} \longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x e^{x^2}}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 e^{x^2}}{e^x}$$ inconcludente $\quad \lim_{x\to+\infty} e^{x^2-x} = +\infty$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$ NO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2\sin x}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x(1+2\cos x)$$ NON ESISTE poiché $-1\leq 1+2\cos x \leq 3$

ma $\frac{x+2\sin x}{\log x} \geq \frac{x-2}{\log x}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$

DEF. Date $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$
Diciamo che f è "trascurabile" rispetto a g per $x\to x_0$
se $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Si scrive $f(x) \ll g(x)$ oppure $f(x) = o(g(x))$ per $x\to x_0$

confronto di funzioni elementari

per $x\to+\infty$

a) $x^a \ll x^b \iff a<b$

b) $a^x \ll b^x \iff 0<a<b$
$e^{ax} \ll e^{bx} \iff a<b$

c) $x^a \ll b^x \iff b>1$

d) $(\log x)^a \ll x^b \iff b>0$

per $x\longrightarrow 0$ $(x\longrightarrow 0^+)$

e) $x^a \ll x^b \iff a>b$

f) $(\log x)^a \ll \frac{1}{x^b} \iff b>0$

Dim

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} x^{a-b} = 0 \iff a-b<0 \iff a<b$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0 \iff \frac{a}{b}<1$ e $a,b>0 \iff 0<a<b$

c) $a=1$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^x \log b} = 0 \iff b>1$

$a>0$ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^a}{b^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{b^{\frac{x}{a}}}\right)^a \overset{\updownarrow}{=} 0$

d) $a=1$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b x^b} = 0 \iff b>0$

$a>0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{b/a}}\right)^a \overset{\updownarrow}{=} 0$

e) $\lim_{x\to0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x\to0} x^{a-b} = 0 \iff a-b>0 \to a>b$

f) $a=1$ $\log x << \frac{1}{x^b}$, $b>0$

$\lim_{x\to0} \frac{\log x}{x^{-b}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{-b x^{-b-1}} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{x^{-b}} = 0$

$a>0$ $\lim_{x\to0} \frac{(\log x)^a}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\log x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{b/a}}\right)^a = 0$

esempio $\lim_{x\to0^+} x^2 \log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty} y^2 e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log\log x} \underset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\log y} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{e^x} = 0$

DEF. $f,g: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$

f e g sono **asintoticamente equivalenti**, e si scrive **$f \sim g$**, per $x\to x_0$, se
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

esempio per $x\to0$ $\sin x \sim x$

per $x\to+\infty$ $x+\log x \sim x$

per $x\to+\infty$ $x^3+x+\log x \sim x$

$\sim$ è una **relazione d'equivalenza** (sulla classe delle funzioni definite sullo stesso dominio)

- simmetria: $f\sim g \iff g\sim f$ $\quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1$
- riflessività: $f\sim f$ poiché $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$
- transitività: $f\sim g, g\sim h \Rightarrow f\sim h$ $\quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 1$

DEF. La **parte principale** per $x\to0$ oppure $x\to+\infty$ di f (se esiste),
è il **monomio ax^b** ($a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq0$) tale che $f\sim ax^b$ per $x\to0$ oppure $x\to+\infty$

esempio pp $x\to0$ $\sin x\sim x$

pp $x\to0$ $\cos x\sim 1$

pp $x\to0$ $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ $\quad \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Proposizione Per $x \to x_0$:

(1) $f \sim g$ se e solo se f si può scrivere come $f = g + r$
con r resto, $r = o(g)$: $f = g + o(g)$ per $x \to x_0$

(2) se $f \sim g$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$
(se uno dei due limiti non esiste, non esiste neanche l'altro)

(3) se $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, allora:
i) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
ii) $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$
iii) $(f_1)^\alpha \sim (g_1)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, con $f_1, g_1 > 0$ se α non intero

(4) Principio di sostituzione nei limiti
$f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$
i) $\lim_{x\to x_0} f_1 f_2 = \lim_{x\to x_0} g_1 g_2$
ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1}{g_2}$
iii) $\lim_{x\to x_0} (f_1)^\alpha = \lim_{x\to x_0} (g_1)^\alpha$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\Rightarrow$: $f = g + r$ $\quad r = f - g$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow r = o(g)$$

$\Leftarrow$: $f = g + o(g)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{g + o(x)}{g} = \lim_{x\to x_0} 1 + \frac{o(g)}{g} = 1 \Rightarrow f \sim g$$

(2) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)} \underset{f\sim g}{=} \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(3) i) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f_2}{g_2} = 1$$

ii) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{g_2}{g_1} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f_2}{g_2} = 1$$

iii) $$\lim_{x\to x_0} \frac{(f)^\alpha}{(g)^\alpha} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

(4) i) $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$
$\Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f_1 f_2 = \lim_{x\to x_0} g_1 g_2$

ii) $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$
$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1}{g_2}$

iii) $f \sim g$
$\Rightarrow (f)^\alpha \sim (g)^\alpha \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f)^\alpha = \lim_{x\to x_0} (g)^\alpha$ $\square$

OSS: $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

$x \to +\infty$ $\quad f_1 = x^4 + x^3 \quad g_1 = x^4 + x$
$f_2 = -x^4 \quad g_2 = -x^4 + x$
$f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$
$f_1 + f_2 = x^3 \quad g_1 + g_2 = 2x$

OSS: in generale $f \sim g \not\Rightarrow \varphi(f) \sim \varphi(g)$

$x \to +\infty$ $\quad f = x^2 \quad g = x^2 + x \quad f \sim g$
$\varphi(y) = e^y \quad \varphi(f) = e^{x^2} \quad \varphi(g) = e^{x^2+x} = e^{x^2} e^x$
$\varphi(f) \not\sim \varphi(g)$

esempio $\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^4 = \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$
$2^x - x^4 \sim 2^x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3 + x + \log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$x + \sin x \sim x \quad x^3 + x + \log x \sim x^3$

Sviluppo di Taylor

Def. Date $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$
Dico che f è "O grande" per $x \to x_0$, e si scrive $f(x) = O(g(x))$, se
$\exists \delta > 0 \ \exists m > 0 : |x - x_0| \leq \delta, x \in X, x \neq x_0 \implies |f(x)| \leq m |g(x)|$
Analogamente si definisce $f(x) = O(g(x))$ per $x \to \pm\infty$

Proposizione Suppongo $x \to x_0$
i) se $f(x) = o(g(x))$, allora $f(x) = O(g(x))$
ii) se esiste il limite $L := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora $f(x) = O(g(x)) \iff L$ è finito
iii) se $f(x) = O(x^a)$ per $x \to 0 \implies f(x) = o(x^b)$ per $x \to 0$ $\forall b < a$

DIMOSTRAZIONE
i) $f(x) = o(g(x)) \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = L$ finito $\implies f(x) = O(g(x))$
ii) $\implies$: $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0 \implies \exists \delta > 0 \ \exists m > 0 : |f(x)| \leq m|g(x)|$ per $|x - x_0| \leq \delta$
$\longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq m \implies -m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m \implies -m \leq L \leq m \implies L$ è finito
$\impliedby$: L finito $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \implies \exists \delta \cdot |x - x_0| \leq \delta, x \in X, x \neq x_0 \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq 1$
$\implies -1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} - L \leq 1 \implies -|L| - 1 \leq L - 1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + 1 \leq |L| + 1 \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |L| + 1 \implies |f(x)| \leq (|L| + 1)|g(x)|$

iii) $f(x) = O(x^a) \implies \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^a} = 1$
Sia $b < a$, allora $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^b} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^a} x^{a-b} = \lim_{x \to 0} x^{a-b} = 0 \implies f(x) = o(x^b)$ □

esempio (1) $f(x) = o(x^2)$ per $x \to x_0$
(2) $f(x) = O(x^2)$
(3) $f(x) = O(x^3)$ $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x^3} \cdot x = L \cdot 0 = 0$
(3) $\implies$ (1) $\implies$ (2)

esempio $-3x^2 + \log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$
Infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + \overbrace{\log x}^{=o(x^2)}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

$\sin x = O(x)$ per $x \to 0$
Infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\sin x = O(1)$ per $x \to +\infty$
poiché $|\sin x| \leq 1$

Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$, dato $k = 1, 2, 3, \dots$
$D^k f := \underbrace{D(D(\dots D(f)))}_{k \text{ volte}}$ definita dove esiste

Notazione alternativa: $D^k f = f^{(k)}$, $D^2 f = f''$
Si pone anche $D^0 f = f$

Def. Data $f: X \to \mathbb{R}$, $d = 0, 1, \dots$ t.c. $0 \in X$ e f è derivabile d volte

Il polinomio di Taylor di f in 0 di ordine d è

$$P_d(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{D^d f(0)}{d!}x^d = \sum_{k=0}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!}x^k$$

Def. Il resto di Taylor (in 0, di ordine d) è

$$R_d(x) := f(x) - P_d(x) \qquad \text{cioè} \qquad f(x) = P_d(x) + R_d(x)$$

Teorema di Taylor Data $f: X \to \mathbb{R}$ e $d = 0, 1, \dots$

(i) Se esiste $\delta > 0$ t.c. f è derivabile d volte su $[-\delta, \delta]$ allora $R_d(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$

(ii) Se esiste $\delta > 0$ t.c. f è derivabile $(d+1)$ volte su $[-\delta, \delta]$ allora $R_d(x) = O(x^{d+1})$ per $x \to 0$ e anzi $\frac{R_d(x)}{x^{d+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{D^{d+1} f(0)}{(d+1)!}$

Lemma $D^k P_d(0) = D^k f(0)$ per $k = 0, 1, 2, \dots, d$

DIMOSTRAZIONE

$k=0$ $\quad P_d(0) = f(0) = D^0 f(0)$

$$P_d(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{D^k f(0)}{k!}x^k \qquad P_d'(x) = f'(0) + f''(0)x + \dots$$

$k=1$ $\quad DP_d(0) = f'(0) = D^1 f(0)$

1) $D^k x^h = \underbrace{h(h-1)\cdots(h-k+1)}_{k \text{ fattori}} x^{h-k}$ per $k \le h$

2) $$D^k P_d(x) = D^k\left(\sum_{h=0}^{d} \frac{D^h f(0)}{h!}x^h\right) = \sum_{h=k}^{d} \frac{D^h f(0)}{h!} D^k x^h = \sum_{h=k}^{d} \frac{D^h f(0)}{h!} h(h-1)\cdots(h-k+1)x^{h-k} = \sum_{h=k}^{d} \frac{D^h f(0)}{(h-k)!}x^{h-k}$$

$$D^k P_d(0) = \frac{D^k f(0)}{0!} = D^k f(0)$$ □

DIMOSTRAZIONE

(i) Ts $\quad R_d(x) = o(x^d)$ cioè $\lim_{x \to 0} \frac{R_d(x)}{x^d} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^d} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_d(x)}{x^d} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_d'(x)}{d\,x^{d-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(0) - P_d''(x)}{d(d-1)x^{d-1}} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D^{d-1} f(x) - D^{d-1} P_d(x)}{d(d-1)\dots 2 \cdot x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D^d f(x) - D^d P_d(x)}{d!} = \frac{D^d f(0) - D^d P_d(0)}{d!} = 0$$

Per il lemma, ad ogni passaggio ho la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi si può usare De L'Hôpital.

(ii) Ts $\quad \lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \frac{D^{d+1} f(0)}{(d+1)!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_d(x)}{x^{d+1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_d'(x)}{(d+1)x^d} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - P_d''(x)}{(d+1)d\,x^{d-1}} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D^k f(x) - D^k P_d(x)}{(d+1)\cdot d \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D^{k+1} f(x) - D^{k+1} P_d(x)}{(d+1)!} = \frac{D^{k+1} f(0) - D^{k+1} P_d(0)}{(d+1)!} = \frac{D^{k+1} f(0)}{(d+1)!}$$ □

Proposizione Dato P polinomio di grado $\leq d$ t.c.
$R(x) := f(x) - P(x) = o(x^d)$
allora $P = P_d$

Lemma Sia Q polinomio di grado $\leq d$
Se $Q = o(x^d)$ per $x \to 0$ allora $Q(x) = 0$

DIMOSTRAZIONE
Per assurdo, sia $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$
sia k il più piccolo intero t.c. $a_k \neq 0$
Quindi $Q(x) \sim a_k x^k \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{Q(x)}{x^d} = \lim_{x \to 0^+} a_k x^{k-d} = \begin{cases} a_d & \text{se } k = d \\ +\infty & \text{se } k < d \end{cases}$ ↯ $\square$

DIMOSTRAZIONE
$Q = P(x) - P_d(x) = f(x) - P_d(x) - (f(x) - P(x)) = o(x^d) - o(x^d) = o(x^d)$
Per il lemma, $Q = 0 \Rightarrow P(x) = P_d(x)$ $\square$

Def. Lo **sviluppo di Taylor** di una funzione f è l'espressione:
$$f(x) = P_d(x) + R_d(x)$$

Sviluppi fondamentali

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+1}) = \sum_{k=0}^{d} \frac{x^k}{k!} + o(x^{d+1})$

<u>Dim</u> $f(x) := e^x$ $\quad D^k f(x) = e^x$ $\quad D^k f(0) = 1$ $\quad \forall k$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+2})$ con $d = 2k+1$ dispari (sviluppo all'ordine $d+1$)
$(-1)^k$ al termine k-esimo

<u>Dim</u> $f(x) = \sin x = D^4 f(x) = D^{4k} f(x)$ $\quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad D^{2k} f(0) = 0 \quad \forall k$
$f'(x) = \cos x = D^{4k+1} f(x)$ $\qquad D^{4k+1} f(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x = D^{4k+2} f(x)$ $\qquad D^{4k+3} f(0) = -1$
$f'''(x) = -\cos x = D^{4k+3} f(x)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+2})$ con $d = 2k$ pari
$(-1)^k$ al termine k-esimo

<u>Dim</u> Similmente $f(x) = \cos x = D^{4k} f(x)$ $\forall k$ $\Rightarrow D^{2k+1} f(0) = 0$
$f'(x) = -\sin x = D^{4k+1} f(x)$ $\qquad D^{4k} f(0) = 1$
$f''(x) = -\cos x = D^{4k+2} f(x)$ $\qquad D^{4k+2} f(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x = D^{4k+3} f(x)$

Oppure:

OSS Se $P_d f$ è il polinomio di Taylor di f: $(P_d f)' = P_{d-1} f'$

<u>Dim</u> $P_d f = \sum_{k=0}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k = f(0) + \sum_{k=1}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k$

Quindi: $(P_d f)' = D\left(\sum_{k=1}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k\right) = \sum_{k=1}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{d} \frac{D^k f(0)}{(k-1)!} x^{k-1}$

Notando che $D^k f(0) = D^{k-1} f'(0)$ e traslando gli indici con $i = k-1$:
$(P_d f)' = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{D^i f'(0)}{i!} x^i = P_{d-1} f'$ $\square$

Quindi $P_d(\cos x) = (P_{d+1}(\sin x))'$ con d pari
$\cos x = (P_{d+1}(\sin x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+2})$

OSS (0) f dispari $\Rightarrow f(0)=0$

(1) f dispari $\Rightarrow f'$ pari

f pari $\Rightarrow f'$ dispari

(2) f pari $\Rightarrow D^k f$ dispari con k dispari $\Rightarrow D^k f(0)=0$ con k dispari

f dispari $\Rightarrow D^k f$ dispari con k pari $\Rightarrow D^k f(0)=0$ con k pari

DIMOSTRAZIONE

(0) $f(x)=-f(-x) \Rightarrow f(0)=-f(0)$ $\quad f(0)=0$

(1) $f(x)=-f(-x) \Rightarrow f'(x)=-f'(-x)(-1)=f'(-x)$ $\quad f(x)=f(-x) \Rightarrow f'(x)=-f'(-x)$

(2)

OSS $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \Rightarrow e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

$\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$

$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\ldots = \cos x + i\sin x$

4) $(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-d+1)}{d!}x^d+O(x^{d+1}) = \sum_{k=0}^{d}\binom{a}{k}x^k+O(x^{d+1})$

con $a \in \mathbb{R}$, $\binom{a}{d} := \frac{a(a-1)\ldots(a-d+1)}{d!}$

Dim $f(x)=(1+x)^a$ $\quad\ldots\ D^k f(x) = a(a-1)\ldots(a-k+1)(1+x)^{a-k}$

$f'(x)=a(1+x)^{a-1}$ $\quad D^k f(0)=a(a-1)\ldots(a-k+1)$

$f''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-2}$

Casi particolari $\quad a=-1$: $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^d x^d+O(x^{d+1})$

$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^d+O(x^{d+1})$

OSS Se $f(x)$ è un polinomio di grado $\leq d$ allora $f(x)=P_d(x)$ (per l'unicità del polinomio)

$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}x^k$ $\quad a=d$ intero $(1+x)^d = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}x^k$ $\quad \forall x$

Binomio di Newton: $(a+b)^d = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}a^{d-k}b^k$

Dim $(a+b)^d = a^d\left(1+\frac{b}{a}\right)^d = a^d(1+x)^d = a^d\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}x^k = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}a^d\cdot\frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}a^{d-k}b^k$

5) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\pm\frac{x^d}{d}+O(x^{d+1})$

Dim $f(x)=\log(1+x)$ $\quad D^4 f(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ $\quad\ldots$

$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad D^k f(x)=\pm\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad D^k f(0)=\pm(k-1)!$

DEF. Data $f: X\to\mathbb{R}$, $\bar{x}\in X$ t.c. f è derivabile d volte in $\bar{x}$, allora il polinomio di Taylor di f in $\bar{x}$ di ordine d è:

$$P_d(h) = f(\bar{x})+f'(\bar{x})h+\frac{f''(\bar{x})}{2!}h^2+\ldots+\frac{D^d f(\bar{x})}{d!}h^d$$

Il resto è:

$$R_d(h) = f(\bar{x}+h)-P_d(h)$$

cioè: $f(\bar{x}+h) = P_d(h)+R_d(h)$

Teorema di Taylor

(i) Se f è derivabile d-volte in $[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta]$ allora $R_d(h)=o(h^d)$

(ii) Se f è derivabile $(d+1)$-volte in $[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta]$ allora $R_d(h)=O(h^{d+1})$

Massimi e minimi

$\max E$ = elemento di E più grande di tutti (se esiste)
$\min E$ = elemento di E più piccolo di tutti (se esiste)

Estremo superiore / inferiore di $E \subset \mathbb{R}$
Se E è unione finita di intervalli I_i disgiunti, I_i con estremi $a_i < b_i$
$\sup E$ = (più grande dei b_i) $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\inf E$ = (più piccolo dei a_i) $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$, $\max f = \max_{x \in X} f(x) := \max \operatorname{Im} f$ (se esiste)
$\min f = \min_{x \in X} f(x) := \min \operatorname{Im} f$ (se esiste)

Se x è ad un sottoinsieme:
$\max f(x) := \max f(X)$ $\min f(x) = \min f(X)$

Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{Im} f$ = unione finita di intervalli
Definisco $\sup_{x \in X} f(x) := \sup \operatorname{Im} f$
$\inf_{x \in X} f(x) := \inf \operatorname{Im} f$

Def. Data $f : X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ è un punto di max se
$f(\bar{x})$ = val max $= \max_{x \in X} f(x)$

Data $f : X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ è punto di min se
$f(\bar{x})$ = val min $= \min_{x \in X} f(x)$

Def. $\bar{x} \in X$ è punto di max locale se $\exists\, \delta > 0$ t.c.
$f(\bar{x}) = \max_{x \in X \cap [x-\delta, x+\delta]} f(x)$

$\bar{x} \in X$ è punto di min locale se $\exists\, \delta > 0$ t.c.
$f(\bar{x}) = \min_{x \in X \cap [x-\delta, x+\delta]} f(x)$

Ricerca dei valori di max e min

Teorema di Weierstrass Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, esistono max e min

Lemma Data $f : X \to \mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di max o min locale interno a X (cioè $\exists\, \delta > 0 : [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \subset X$) tale che $f'(\bar{x})$ esiste, allora $f'(\bar{x}) = 0$

DIMOSTRAZIONE (min locale)
$\exists\, \delta > 0 : [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \subset X$ & $f(\bar{x}) = \min_{\bar{x}-\delta \le x \le \bar{x}+\delta} f(x)$
Per h positivo, $h < \delta$, vale:
$f(\bar{x}+h) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) \geq 0$
Per h negativo, vale: $\dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) \leq 0$
Allora $f'(\bar{x}) = 0$ □

corollario Data $f: X \to \mathbb{R}$, X unione finita di intervalli
I punti di max e min sono contenuti in
$E = \{x \in X \text{ t.c. } f'(x) = 0\} \cup \{x \mid f'(x) \text{ non esiste}\} \cup \{\text{estremi } a_i, b_i\}$

Dal lemma segue che, se max/min $\notin$ {estremi a_i, b_i} e max/min $\notin \{x \mid f'(x) \text{ non esiste}\}$
$\Rightarrow$ max/min $\in \{x \mid f'(x) = 0\}$

Procedura per la ricerca dei valori di max e min

Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tale che E è finito
Allora $\max f = \max\limits_{x \in X} f(x) = \max\limits_{x \in E} f(x)$
$\min f = \min\limits_{x \in X} f(x) = \min\limits_{x \in E} f(x)$

Inoltre i punti di min/max di f sono i punti di min/max di f ristretta a E.

Procedura estesa per la ricerca dei valori di max e min

$f: X \to \mathbb{R}$, X unione finita di intervalli I_i con estremi $a_i < b_i$
f continua ed esistono $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x) =: f(a_i^+)$ (se $a_i \notin X$)
$\lim\limits_{x \to b_i^-} f(x) =: f(b_i^-)$ (se $b_i \notin X$)
Prendo E come prima. Suppongo E finito.
Confronto i valori di f nei punti di E
Se f non è definita in a_i o b_i considero i limiti corrispondenti $f(a_i^+)$ e $f(b_i^-)$
Il più alto è il max, se f è definita in quel punto, altrimenti è sup.

esempio Trovare max/min di $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ sull'insieme di definizione
$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$E = \{\pm\infty, 0^+, 0^-, 2\}$ dove $f'(x) = (x-2)e^x x^{-3} = 0$
$\underset{\text{sup}}{f(+\infty) = +\infty}$ $\quad \underset{\text{inf}}{f(-\infty) = 0}$ $\quad \underset{\text{sup}}{f(0^\pm) = +\infty}$ $\quad f(2) = \frac{e^2}{4}$ $\quad$ non esistono max/min

VARIANTE $X = (0, 3]$
$E = \{0^+, 3, 2\}$
$\underset{\text{sup}}{f(0^+) = +\infty}$ $\quad f(3) = \frac{e^3}{9}$ $\quad \underset{\text{min}}{f(2) = \frac{e^2}{4}}$ $\quad$ non ammette max

$\bar{x}$ punto di max o min locale (interno a X) $\not\Leftarrow\!\Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$

Lemma Sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua
$\bar{x} \in X$ t.c. $f'(\bar{x}) = 0$ e esiste $f''(\bar{x})$
(i) se $f''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ minimo locale e f convessa
(ii) se $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ massimo locale e f concava

DIMOSTRAZIONE
Uso lo sviluppo di Taylor di f in $\bar{x}$ all'ordine $d=2$:
$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}h^2 + o(h^2) = f(\bar{x}) + h^2 \underbrace{\left(\frac{f''(\bar{x})}{2!} + o(1)\right)}_{\omega(h)}$$

$\omega(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{f''(\bar{x})}{2} = L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. se $|h| \leq \delta \Rightarrow \omega(h) \geq \frac{L}{2}$ (def. di limite con $\varepsilon = \frac{L}{2}$ / continuità)

allora per $|h| \geq \delta \Rightarrow f(\bar{x}+h) \geq f(\bar{x}) + \frac{L}{2}h^2 \geq f(\bar{x})$
$\Rightarrow \bar{x}$ è minimo locale

□

crescenza e decrescenza

Def. Data $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, si dice che f è **crescente** se
$\forall x_0, x_1 \in X \quad x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1)$
f è **strettamente crescente** se
$\forall x_0, x_1 \in X \quad x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$
Si dice che f è **decrescente** se
$\forall x_0, x_1 \in X \quad x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \geq f(x_1)$
f si dice **strettamente decrescente** se
$\forall x_0, x_1 \in X \quad x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$

Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$, derivabile in tutti punti, allora:
(i) $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ crescente
(ii) $f' > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente
(iii) $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ decrescente
(iv) $f' < 0 \Rightarrow f$ strett. decrescente

Commenti
- f strett. crescente $\not\Rightarrow f' > 0$
  esempio $f(x) = x^3$
- f strett. crescente $\Leftrightarrow f' \geq 0$ & $\{x \mid f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli
- è essenziale che f sia definita su un intervallo
  esempio $f(x) := -\frac{1}{x}$

DIMOSTRAZIONE
f crescente $\Rightarrow f' \geq 0$ (f decrescente $\Rightarrow f' \leq 0$)
prendo $x \in X$, f crescente $\Rightarrow \forall h > 0$, $f(x+h) \geq f(x) \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$
$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$
OSS f decrescente $\Leftrightarrow -f$ crescente $\Rightarrow (-f)' \geq 0 \Rightarrow -f' \geq 0 \Rightarrow f' \leq 0$

$f' > 0 \Rightarrow f$ crescente $\qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow L > 0 \Rightarrow \exists \delta$ t.c. $\forall\, 0 \leq h \leq \delta$, $f(x+h) > f(x)$
NON FUNZIONA

Def. $C \subset \mathbb{R}^d$ è **convesso** se
" $\forall p_0, p_1 \in C$, il segmento $[p_0, p_1]$ di estremi p_0, p_1 è contenuto in C "
dove $[p_0, p_1] = \{p_\lambda := (1-\lambda) p_0 + \lambda p_1 \mid \lambda \in [0,1]\}$
cioè $\forall p_0, p_1 \in C, \lambda \in [0,1] : (1-\lambda) p_0 + \lambda p_1 \in C$

Def. $f: I \to \mathbb{R}$ si dice **convessa** se il sopragrafico $\{(x,y) \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ è convesso.
$f: I \to \mathbb{R}$ si dice **concava** se il sottografico $\{(x,y) \mid x \in I, y \leq f(x)\}$ è convesso.
f strettamente convessa
$\forall x_0, x_1 \in I, \lambda \in (0,1) \qquad f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) < (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$

OSS f convessa $\Leftrightarrow -f$ è concava

Proposizione Data $f: I \to \mathbb{R}$ sono equivalenti:

(i) f è convessa (concava)

(ii) dati $p_0, p_1 \in$ grafico, il segmento $[p_0, p_1]$ sta sopra il grafico, (sotto) ossia è contenuto nel sopragrafico

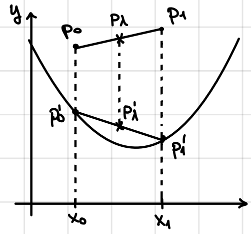
(iii) $\forall x_0, x_1 \in I$, $\lambda \in [0,1]$ $\quad f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1) \quad (\geq)$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) ovvia

(ii) $\Rightarrow$ (i) prendo $p_0 = (x_0, y_0)$ e $p_1 = (x_1, y_1)$. $p_0' = (x_0, f(x_0))$ e $p_1' = (x_1, f(x_1))$ sono nel grafico

quindi per (ii), $[p_0', p_1'] \subset$ sopragrafico $\Rightarrow$ $[p_0, p_1] \subset$ sopragrafico



$p_\lambda = ((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 ; (1-\lambda)y_0 + \lambda y_0)$

$p_\lambda' = ((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 ; (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1))$

$\begin{cases} y_0 \geq f(x_0) \\ y_1 \geq f(x_1) \end{cases}$

$p_\lambda' \in$ sopragrafico $\Rightarrow f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1) \leq (1-\lambda) y_0 + \lambda y_1$

$\Rightarrow p_\lambda \in$ sopragrafico

(ii) $\Rightarrow$ (iii) prendo $x_0, x_1 \in I$, $\lambda \in [0,1]$, prendo $p_0 = (x_0, f(x_0))$, $p_1 = (x_1, f(x_1))$

per (ii) $[p_0, p_1] \subset$ sopragrafico $\Rightarrow p_\lambda \in$ sopragrafico $\quad p_\lambda = ((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 ; (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1))$

$\Leftrightarrow f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$

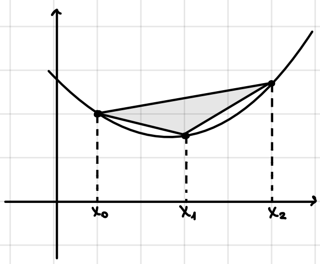
Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte, allora:

(i) $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f'$ è crescente $\Leftrightarrow f$ convessa

(ii) $f'' \leq 0 \Leftrightarrow f'$ è decrescente $\Leftrightarrow f$ concava

Lemma Data $f: I \to \mathbb{R}$ convessa, dati $x_0 < x_1 < x_2 \in I$, allora

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



DIMOSTRAZIONE

Poiché $x_0 < x_1 < x_2$, $\exists \lambda \in (0,1)$ t.c. $x_1 = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_2$ con $\lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$

$\xRightarrow{f \text{ conv.}} f(x_1) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \leq \lambda (f(x_2) - f(x_0))$

$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

Inoltre $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - \frac{f(x_1) - \lambda f(x_2)}{1-\lambda}}{x_2 - \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}} = \frac{(1-\lambda) f(x_2) - f(x_1) + \lambda f(x_2)}{(1-\lambda) x_2 - x_1 + \lambda x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\square$

DIMOSTRAZIONE

f convessa $\Rightarrow f'$ crescente

prendo $x_0 < x_2 \in I$ e dimostro $f'(x_0) \leq f(x_2)$

prendo $h > 0$ t.c. $x_0 + h < x_2$ e $x_0 < x_2 - h$, ossia $h < x_2 - x_0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h}$$

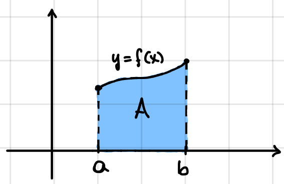
$\downarrow h \to 0 \qquad\qquad \downarrow h \to 0$

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq f'(x_2)$$

INTEGRALI (CALCOLO)

Def. Data $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua

Se $f\geq 0$, l'integrale definito di f da a a b, $\int_a^b f(x)\,dx$,
è l'area del sottografico $A:=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$

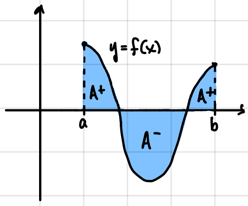


Per f non necessariamente positiva, si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } A^+ - \text{area } A^-$$

dove $A^+:=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$

$A^-:=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ f(x)\leq y\leq 0\}$



Inoltre si definisce $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

a e b sono gli estremi di integrazione

f è la funzione integranda

oss Se $f\geq 0$, A^- è contenuto in un segmento $\Rightarrow$ area$(A^-)=0$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } A^+\geq 0$

Se $f\leq 0$, A^+ è contenuto in un segmento $\Rightarrow$ area$(A^+)=0$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\text{area } A^-\leq 0$

Se $a=b$, A^+, A^- = segmenti (o meno) $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=0$

Perché questa def. è insoddisfacente?

Perché l'area di un insieme del piano è un concetto non ben definito

Altri significati

$P(t)$ si muove con velocità scalare $v(t)$

la distanza percorsa tra t_0 e t_1 è $d=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$

$P(t)$ si muove con velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ ed è sottoposto a una forza $\vec{F}$

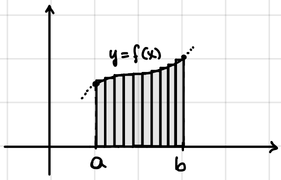
il lavoro tra t_0 e t_1 è $L=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(p(t))\cdot\vec{v}(t)\,dt$

calcolo approssimato dell'integrale

Divido $[a,b]$ in n segmenti di lunghezza δ:

$\delta=\dfrac{b-a}{n}$ $\qquad I_1,\dots,I_n$

$\forall i=1,\dots,n$ scelgo $x_i\in I_i$



$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n}\text{area}(R_i)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta$$

Se f è continua $\qquad \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta\right)=\int_a^b f(x)\,dx$

calcolo esatto dell'integrale

Def. Date due funzioni $f,F: I\longrightarrow\mathbb{R}$,

dico che F è una primitiva di f se

$$F'(x)=f(x)\quad\forall x\in I$$

e si indica $\int f(x)\,dx + c$

esempio una primitiva di x^2 è $\frac{x^3}{3}$, ma anche $\frac{x^3}{3}+c$ con c costante

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Date $f, F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con f continua e F primitiva di f.
Allora:
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
Notazione: $F(b) - F(a) = |F(x)|_a^b$

DIMOSTRAZIONE (idea)
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\delta \cong \sum_{i=1}^{N} \frac{F(x_i+\delta) - F(x_i)}{\delta} \cdot \delta =$$
con x_i = estremo sinistro di I_i — sostituisco $f(x_i) = F'(x_i)$ con il rapp. incrementale

$$= -F(x_1) + \cancel{F(x_1+\delta)} - \cancel{F(x_2)} + F(\cancel{x_2+\delta}) - \ldots - \cancel{F(x_N)} + F(x_N+\delta) = F(b) - F(a)$$
Per concludere, bisogna far vedere gli errori nei due $\cong$ tendono a 0 con δ.

esempio
$$\int_0^2 x^2\,dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$$
$$\int_{-1}^1 e^x\,dx = |e^x|_{-1}^1 = e - e^{-1} = \frac{e^2-1}{e}$$

Oss f dispari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (perché A^+ e A^- sono simmetrici e quindi area(A^+) = area(A^-))
f pari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Tabella delle primitive elementari

$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + c$
x^a $(a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\log x + c$ // $\log(-x) + c$ su $(0,+\infty)$ su $(-\infty,0)$ — $\log\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
a^x $(a>0, a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a} + c$
$\log x$	$x(\log x - 1) + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

Regole di integrazione

1) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)\,dx$

Dim Sia F una primitiva di f: $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$

2) a) $\int m f(x)\,dx = m\int f(x)\,dx$
b) $\int_a^b m f(x)\,dx = m\int_a^b f(x)\,dx$

Dim a) Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$
$\Rightarrow mF(x)$ è una primitiva di $mf(x)$
Infatti $(mF(x))' = m\,F'(x) = mf(x)$
b) $\int_a^b mf(x)\,dx \underset{a)}{=} |mF(x)|_a^b = mF(b) - mF(a) = m(F(b) - F(a)) = m\int_a^b f(x)\,dx$

3) a) $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Dim a) Sia F prim. di f, G prim. di g

$\Rightarrow F(x)+G(x)$ è una primitiva di $f(x)+g(x)$

Infatti $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$

b) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = |F(x)+G(x)|_a^b = F(b)+G(b) - F(a) - G(a) = (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

esempio $\int 2e^x - \frac{3}{x}\,dx = 2\int e^x\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx = 2e^x - 3\log x + c$

4) Formula di integrazione per parti:

$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = |F(x)\cdot g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$

Dim a) $F(x)\cdot g(x) = \int f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)\,dx$

Infatti $(F(x)\cdot g(x))' = F'(x)\,g(x) + F(x)\cdot g'(x) = f(x)\,g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

b) $|F(x)\cdot g(x)|_a^b = \int_a^b f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)\,dx$

esempio $\int \underset{g}{x}\underset{f}{e^x}\,dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx = xe^x - e^x + c$

$\int \log x\,dx = \int \underset{g}{\log x}\cdot \underset{f}{1}\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c$

$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int \underset{g}{\log x}\cdot \underset{f}{\frac{1}{x}}\,dx = \log x\cdot\log x - \int \log\cdot\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow 2\int\frac{\log x}{x}\,dx = \log^2 x \Rightarrow \int\frac{\log x}{x}\,dx = \frac{\log^2 x}{2} + c$

5) Formula di cambio di variabile

a) $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$

$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(y)\,dy = F(y) + c = F(g(x)) + c$

$y = g(x)$, $dy = g'(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = |F(y)|_{g(a)}^{g(b)}$

$y = g(x)$, $dy = g'(x)\,dx$

Caso particolare

$\int f(mx+q)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(y)\cdot\frac{1}{m}\,dy = \frac{1}{m}\int f(y)\,dy$

$y = mx+q$ $dy = m\,dx \longrightarrow \frac{1}{m}\,dy = dx$

$\int_a^b f(mx+q)\,dx \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{m}\int_{ma+q}^{mb+q} f(y)\,dy$

esempio $\int_0^2 e^{2x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\,|e^y|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}$

$y = 2x$, $dy = 2dx$

$\int e^{x^2}x\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

$y = x^2$, $dy = 2x\,dx$

$\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int\frac{1}{y}\,dy = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$

$y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$

$\int e^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int e^y\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$y = x^2$, $dy = 2x\,dx \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = dx$

esempio

- $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left|\arctan x\right|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

- $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{\substack{y=\frac{1}{x},\ x=\frac{1}{y}}}{=} -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{\pi}{2}$ Dov'è l'errore? $y=\frac{1}{x}$ non è definita in 0

$dy = -\frac{1}{x^2}dx$, $dx = -x^2 dy = -\frac{1}{y^2}dy$

- $\int_{-2}^{2} e^{x^2}\,dx \underset{y=x^2}{=} \int_{4}^{4} e^{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = 0$ Dov'è l'errore? $x=\pm\sqrt{y}$

$dy = 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = dx$

- $\int_{0}^{4} e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{y=\sqrt{x}}{=} \int_{0}^{2} 2y\,e^{y}\,dy = \left|e^{y}2y\right|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} e^{y}\,2\,dy = 4e^2 - 2\left|e^{y}\right|_{0}^{2} = 4e^2 - 2e^2 + 2 = 2e^2+2$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \rightarrow 2y\,dy = dx$

- $\underset{[-1,1]}{\int \sqrt{1-x^2}\,dx} \underset{x=\sin y}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

per parti

$\cos^2 y = \frac{\cos 2y + 1}{2}$ $\quad = \int \frac{\cos 2y}{2} + \frac{1}{2}\,dy =$

$dx = \cos y\,dy$

$= \frac{1}{4}\sin 2y + \frac{1}{2}y + c = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{1}{2}\arcsin x + c$

OSS Se $G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$, allora $G(x)$ è una primitiva di f

Integrali di funzioni razionali fratte

Trovare una primitiva di $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ con $N(x), D(x)$ polinomi

Si ha che: (*) $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ con $Q(x), R(x)$ polinomi e $\deg R(x) < \deg D(x)$

Si riduce quindi a $\int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$

La fattorizzazione complessa di $D(x)$ è:

$$D(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{n_i} \qquad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum n_i = n = \deg D(x)$$

Se considero invece la sua fattorizzazione reale, si ha:

$$D(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\underbrace{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}_{\Delta<0}\cdots\underbrace{(x^2+b_jx+c_j)^{m_j}}_{\Delta<0}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $n_1+n_2+\ldots+n_k+2m_1+\ldots+2m_j = n$

Dato $\frac{R(x)}{D(x)}$, allora esistono delle costanti tali che:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{F_1}{x-a_k} + \ldots + \frac{F_{n_k}}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_{m_1}x+C_{m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{E_1x+G_1}{x^2+b_jx+c_j} + \ldots + \frac{E_{m_j}x+G_{m_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{m_j}}$$

DIMOSTRAZIONE

Dato $\frac{R(x)}{(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_k)^{n_k}}$ con $n_1+\ldots+n_k = n$ e $R \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$,

esistono $R_1 \in \mathbb{R}_{n_1-1}[x], R_2 \in \mathbb{R}_{n_2-1}[x], \ldots, R_k \in \mathbb{R}_{n_k-1}[x]$ t.c.

$$\frac{R(x)}{(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_k)^{n_k}} = \frac{R_1(x)}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{R_2(x)}{(x-x_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{R_k(x)}{(x-x_k)^{n_k}} \qquad (*)$$

(**) $R(x) = R_1(x)\prod_{i\neq 1}(x-x_i)^{n_i} + R_2(x)\prod_{i\neq 2}(x-x_i)^{n_i} + \ldots + R_k(x)\prod_{i\neq k}(x-x_i)^{n_i}$

Considero l'applicazione:

$$T: \mathbb{R}_{n_1-1}[x] \times \mathbb{R}_{n_2-1}[x] \times \ldots \times \mathbb{R}_{n_k-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

$$(R_1, R_2, \ldots, R_k) \longmapsto R_1(x)\prod_{i\neq 1}(x-x_i)^{n_i} + R_2(x)\prod_{i\neq 2}(x-x_i)^{n_i} + \ldots + R_k(x)\prod_{i\neq k}(x-x_i)^{n_i}$$

Voglio verificare che T è surgettiva $\Leftrightarrow$ T è iniettiva $\Leftrightarrow$ $T(x)=0$ allora $x=0$

$T(x)=0 \Leftrightarrow R_1(x)\prod_{i\neq 1}(x-x_i)^{n_i} + R_2(x)\prod_{i\neq 2}(x-x_i)^{n_i} + \ldots + R_k(x)\prod_{i\neq k}(x-x_i)^{n_i} = 0$

$R_1(x)\prod_{i\neq 1}(x-x_i)^{n_i} = -R_2(x)\prod_{i\neq 2}(x-x_i)^{n_i} - \ldots - R_k(x)\prod_{i\neq k}(x-x_i)^{n_i} = (x-x_1)^{n_1}\left[-R_2(x)\prod_{i\neq 1,2}(x-x_i)^{n_i} - \ldots - R_k(x)\prod_{i\neq 1,k}(x-x_i)^{n_i}\right]$

Ma $R_1(x) \in \mathbb{R}_{n_1-1}[x] \Rightarrow R_1(x) = 0$

Ripetendo il ragionamento, si ha: $R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = \ldots = R_k(x) = 0$

Con la stessa strategia, si dimostra che: $\frac{R_1(x)}{(x-x_1)^{n_1}} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}}$

(si costruisce $T': \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n_1 \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}_{n_1-1}[x], \ldots$) $\square$

Il calcolo si riduce a questi integrali:

i) $\int \frac{A}{x-a}\,dx$ ii) $\int \frac{B}{(x-a)^\ell}\,dx$ iii) $\int \frac{Cx+D}{x^2+bx+c}\,dx$

iv) $\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$ v) $\int \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)^j}\,dx$ vi) $\int \frac{1}{(x^2+1)^j}\,dx$

i) $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + \text{cost}$

$A, a \in \mathbb{R}$

ii) $\int \frac{B}{(x-a)^\ell}\,dx = B\int (x-a)^{-\ell}\,dx = \frac{B(x-a)^{-\ell+1}}{-\ell+1} + \text{cost}$

$B, a \in \mathbb{R},\ \ell>1$

iii) $\int \frac{Cx+D}{x^2+bx+c}\,dx$

$(x^2+bx+c)' = 2x+b \longrightarrow Cx+D = \frac{C}{2}\left(2x+\frac{2D}{C}+b-b\right) = \frac{C}{2}(2x+b) + D - \frac{Cb}{2}$

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{C}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + \left(D-\frac{Cb}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{C}{2}\log|x^2+bx+c| + \text{cost} + \left(D-\frac{Cb}{2}\right)(iv)$$

iv) $$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c}\,dx \underset{A^2=c-\frac{b^2}{4}}{=} \int \frac{1}{A^2\left[\frac{(x+\frac{b}{2})^2}{A^2}+1\right]}\,dx =$$

Completamento del quadrato: $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}+c$

$$= \frac{1}{A^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{A}\right)^2+1}\,dx \underset{\substack{t=\frac{x}{A}+\frac{b}{2A}\\ dt=\frac{1}{A}dx}}{=} \frac{1}{A^2}\cdot A\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{A}\arctan t + \text{cost} = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + \text{cost}$$

v) $\int \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)^j}\,dx$

con manipolazioni algebriche + cambio di variabile, mi riconduco alla forma:

$$c_1\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx + c_2\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt = c_1\log|x^2+bx+c| + c_2\,(vi)$$

vi) $$I_j = \int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt = \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{j+1}}\,dt + I_{j+1} = \int \frac{2t}{(t^2+1)^{j+1}}\cdot\frac{1}{2}t\,dt + I_{j+1} =$$

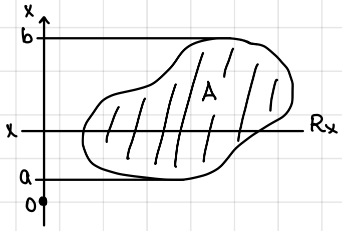
$$= -\frac{1}{j(t^2+1)^j}\cdot\frac{1}{2}t + \int \frac{1}{j(t^2+1)^j}\cdot\frac{1}{2}\,dt + I_{j+1} = -\frac{t}{2j(t^2+1)^j} + \frac{1}{2j}I_j + I_{j+1}$$

$$\Rightarrow I_{j+1} = \left(1-\frac{1}{2j}\right)I_j + \frac{t}{2j(t^2+1)^j}$$

con $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c$

Calcolo di aree e volumi

1) A insieme nel piano (limitato, regolare (?))

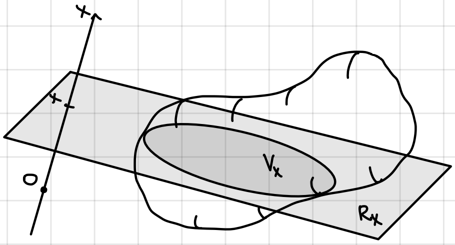


$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad A_x$ = sezione di A ad altezza $x := A \cap R_x$

$\ell(x) :=$ lung(A_x)

$$\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx$$ con a, b t.c. A_x = vuoto se $x<a$ opp $x>b$

2) V insieme nello spazio (limitato, regolare (?))



$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad R_x$ piano ortogonale all'asse e passante per x

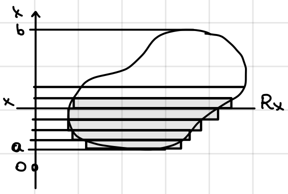
V_x = sezione di V ad altezza $x := V \cap R_x$

$a(x) :=$ area (V_x)

$$\text{vol}(V) = \int_a^b a(x)\,dx$$ con a, b t.c. $V_x = \emptyset$ per $x \leq a$ opp. $x \geq b$

Giustificazione (1)

Divido $[a,b]$ in N segmenti $I_1, \dots, I_N$ di lungh. $\delta = \frac{b-a}{N}$; $I_i = [x_{i-1}, x_i]$

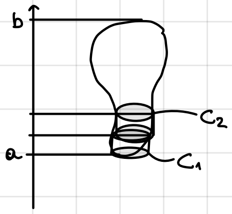


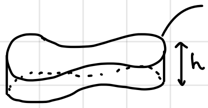
R_i = rettangolo di base A_x e altezza δ

$$\text{area}(A) \simeq \sum_{i=1}^{N} \text{area}(R_i) = \sum_{i=1}^{N} \ell(x_i)\,\delta \simeq \int_a^b \ell(x)\,dx$$

$$\text{area}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{N} \text{area}(R_i) \qquad \Rightarrow \text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

Giustificazione (2)





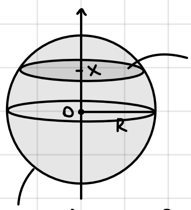
C cilindro di base B

vol(C) = area(B) · h

C_1 = cilindro di base A_{x_1} e altezza δ

$$\text{vol}(V) \simeq \sum_{i=1}^{N} \text{vol}(C_i) = \sum_{i=1}^{N} \text{area}(A_{x_i}) \cdot \delta = \sum_{i=1}^{N} a(x_i)\,\delta \simeq \int_a^b a(x)\,dx$$

Volume sfera



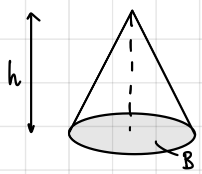
B sfera di raggio R

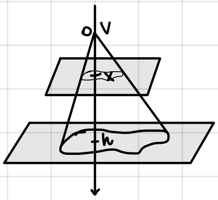
B_x = circonf. di raggio $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$\{(y,z) \mid y^2 + z^2 \leq R^2 - x^2\}$

$$\text{vol}(B) = \int_{-R}^{R} a(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi (r(x))^2\,dx = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Volume cono





C = cono di vertice V e base B

(= unione dei segmenti $[V,p]$ con p che varia in B)

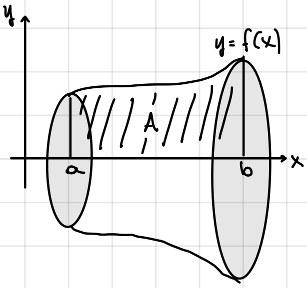
C_x = copia rimpicciolita di B di un fattore $\frac{x}{h}$ (omotetia)

$$\text{area}(C_x) = \text{area}(B) \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

$$\text{vol}(C) = \int_0^h \text{area}(C_x)\,dx = \int_0^h \text{area}(B)\,\frac{x^2}{h^2}\,dx = \frac{\text{area}(B)}{h^2} \int_0^h x^2\,dx =$$

$$= \frac{\text{area}(B)}{h^2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{\text{area}(B)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,\text{area}(B) \cdot h$$

Vol. solidi di rotazione (I)



Hp: $f : [a,b] \longrightarrow [0,+\infty)$

$A := \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

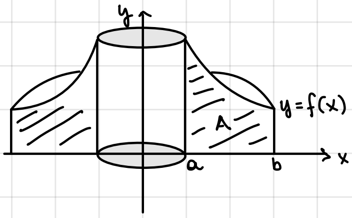
$V :=$ solido ottenuto ruotando A attorno all'asse x

$$vol(V) = \int_a^b area(V_x)\,dx = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$$

↳ disco di raggio $f(x)$

$$\boxed{vol(V) = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx}$$

Vol. solidi di rotazione (II)



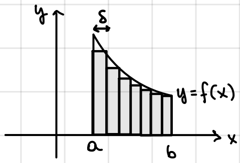
$f : [a,b] \longrightarrow [0,+\infty)$, $0 \le a \le b$

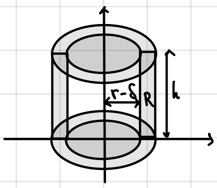
$A := \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$V =$ solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y

$$\boxed{vol(V) = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx}$$

Giustificazione





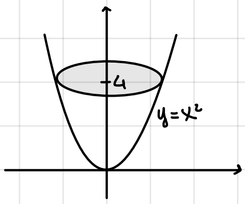
C_i = cilindro ottenuto ruotando il rett. R_i attorno all'asse y

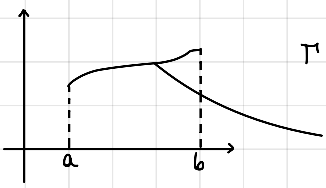
$vol(C) = h\pi(r^2 - (r-\delta)^2) = h\pi(2r\delta - \delta^2) \xrightarrow{\delta \to 0} 2\pi r h \delta$

$vol(C_i) \simeq 2\pi x_i f(x_i)\,\delta$

$$vol(V) \simeq \sum_{i=1}^{N} vol(C_i) \simeq \sum_{i=1}^{N} 2\pi x_i f(x_i)\,\delta \simeq \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

esempio





$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid a \le x \le b\}$

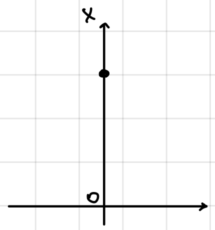
$P(t) = (t, f(t))$ $\quad \vec{v}(t) = (1, f'(t))$ $\quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ $\quad a \le t \le b$

$$lung(\Gamma) = \int_a^b |\vec{v}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI (CALCOLO)

Motivazioni

- Solido in caduta libera



problema: trovare $x(t)$ = altezza al tempo t

$f = ma \qquad a = \ddot{x}(t)$

$f = -mg$

$\Rightarrow -mg = m\ddot{x}(t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) = -g}$

$\dot{x}(t) = -gt + c_1$

$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2$ costanti qualunque

Per determinare la soluzione $x(t)$ devo conoscere:

- l'altezza $x(t_0) = x_0$ ad un certo istante iniziale t_0
- la velocità $v(t_0) = v_0$

Se $t_0 = 0$: $x_0 = x(0) = c_2$ e $v_0 = \dot{x}(0) = c_1$

- Equazione di decadimento

$x(t)$ = quantità di materiale (radioattivo) che decade

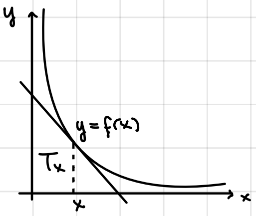
$\frac{\Delta x}{\Delta t} = kx$ quantità di materiale che si trasforma nell'intervallo Δt

$x(t+\Delta t) = x(t) - k\Delta t x(t) \longrightarrow \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -kx(t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} x'(t) = -kx(t)$

$\longrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -k \longrightarrow \log(x(t)) = -kt + c_1 \longrightarrow x(t) = e^{-kt+c_1} = c_2 e^{-kt}$

- Trovare $f: (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ t.c.

area(T_x) non dipende da x (cioè $\frac{d\,\text{area}(T_x)}{dx} = 0$)



DEF. Un' equazione differenziale è un' equazione in cui l'incognita è una funzione $x = x(t)$

Equazioni differenziali del I ordine

DEF. Un' equazione differenziale è del I ordine se si può scrivere in forma normale:

$\dot{x} = f(x,t)$ con f funzione data

$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ si chiama problema di Cauchy

Teorema di esistenza e di unicità	Sotto opportune ipotesi su f, il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione.

- l'unicità può non valere
- per quali t, $x(t)$ è definita?

Equazioni a variabili separabili

$\dot{x} = g(x)\,h(t)$ cioè $f(t,x) = g(x)h(t)$

esempio $\dot{x} = tx^2$ sì $\qquad \dot{x} = \sin x$ sì

$\dot{x} = t + x$ NO $\qquad \dot{x} = e^{t+x}$ sì

$\frac{dx}{dt} = g(x)\,h(t) \longrightarrow \int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int h(t)\,dt \qquad G(x) = H(t) + c$

Se possibile, esplicito x: $x(t) = G^{-1}(H(t)+c)$ (G primitiva di $\frac{1}{g}$, H primitiva di h)

Giustificazione

$\dot{x}(t) = g(x(t))\,h(t)$

$\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t)$

$\int \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}\,dt = \int h(t)\,dt = H(t) + c$

$\int \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))}\,dt \underset{x = x(t)}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{g(x)}\,dx = \underset{\text{primitiva di } \frac{1}{g(x)}}{G(x)} = G(x(t))$

$dx = \dot{x}(t)\,dt$

$G(x(t)) = H(t) + c$

si esplicita $x(t)$

se G è invertibile: $x(t) = G^{-1}(H(t)+c)$

Con questa procedura si ottengono tutte le soluzioni tranne poche

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x)h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 \text{ t.c. } g(x_0) = 0$$

In questo caso, la soluzione è $x(t) = x_0$

esempio
$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)^3 e^t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt} = (x-1)^3 e^t \longrightarrow \int (x-1)^{-3}\,dx = \int e^t\,dt \longrightarrow \frac{(x-1)^{-2}}{-2} = e^t + c$

$(x-1)^{-2} = -2e^t + c$

$(x(0)-1)^{-2} = -2\cdot e^0 + c \longrightarrow 1^{-2} = -2 + c \longrightarrow c = 3$

$(x-1)^{-2} = 3 - 2e^t$

$(x-1)^2 = \frac{1}{3-2e^t} \qquad x - 1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{3-2e^t}} \qquad x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{3-2e^t}} + 1$

VARIANTE $x(0) = -2$

$c = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$

$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{19}{9} - 2e^t}} + 1 \longrightarrow$ la scelta giusta è con il meno

VARIANTE $x(0) = 1$

$\frac{1}{0} = -2 + c$ non ha senso

Non procedo così perché 1 annulla $g(x) = (x-1)^3$

La soluzione è $x(t) = 1$

Quando vale il teorema di unicità?

Il teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy vale se f è derivabile in x con derivata continua

- esistenza: f continua
- unicità: $\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste ed è continua

esempio
$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{x}\,t^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Equazioni lineari del I ordine

$\dot{x} + a(t)\,x = b(t)$ (cioè $\dot{x} = f(t,x)$ con $f(t,x) = b(t) - a(t)x$ (affine in x))

$a(t), b(t)$ funzioni note

esempio $\dot{x} - 3x = 0$ — $\dot{x} + tx^2 = 0$ NO

$\dot{x} - 3xt = 0$ — $\dot{x} + tx^2 = e^t$ NO

$\dot{x} - 3xt = e^t$

Si prende $A(t)$ primitiva di $a(t)$

Si moltiplica l'equazione per $e^{A(t)}$ (fattore integrante)

$$\dot{x}(t)\,e^{A(t)} + x(t)\,a(t)\,e^{A(t)} = b(t)\,e^{A(t)}$$

$$(x e^{A(t)})' = b(t)\,e^{A(t)}$$

$$x e^{A(t)} = \int b(t)\,e^{A(t)}\,dt + c$$

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[\int b(t)\,e^{A(t)}\,dt + c\right]$$

$$\begin{cases} \dot{x} + a(t)\,x = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

cercare $A(t)$ t.c. $A(t_0) = 0$

$$(x(s)\,e^{A(s)})' = b(s)\,e^{A(s)}$$

integrare tra t_0 e t $\quad x(t)\,e^{A(t)} - x(t_0)\,e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{A(s)}\,ds$

$$x(t) = e^{-A(t)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{A(s)}\,ds\right)$$

EDO del II ordine

Def. Sono equazioni differenziali della forma

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$$

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Teorema di esistenza e di unicità di soluzioni di PC	Sotto opportune ipotesi su f, (PC) ammette un'unica soluzione (l'equazione $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ che soddisfa $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_1$)

EDO lineari del II ordine

$$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$$

- $c(t)$ è detto termine noto
- se $c(t) = 0$ allora l'eq. è omogenea
- $a(t), b(t)$ coefficienti
- Se $a(t) = a$, $b(t) = a$ indipendenti da t, diciamo che l'equazione è a coefficienti costanti

Se $c(t)=0$

Teorema Sia X l'insieme delle soluzioni dell'EDO del II ordine lineare omogenea
$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$$
Allora X è uno spazio vettoriale di dimensione 2
(di funzioni definite su I, intervallo di definizione di $a(t)$ e $b(t)$)

Corollario Siano $x_1(t), x_2(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti di $x''+a(t)x'+b(t)x=0$
Allora le soluzioni sono del tipo $x_{om}(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

i) X è sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni di $(*)$ e $c\in\mathbb{R}$,
allora $x_1(t)+cx_2(t)$ è soluzione di $(*)$
$$x_1''+a(t)x_1'+b(t)x_1=0$$
$$x_2''+a(t)x_2'+b(t)x_2=0$$
Devo mostrare che $x_1(t)+cx_2(t)$ è soluzione di $(*)$
$$(x_1+cx_2)''+a(t)(x_1+cx_2)'+b(t)(x_1+cx_2)=x_1''+cx_2''+a(t)(x_1'+cx_2')+b(t)(x_1+cx_2)=$$
$$=x_1''+a(t)x_1'+b(t)x_1+c(x_2''+a(t)x_2'+b(t)x_2)=0$$

ii) $x(t)=0\in X$
$$0+a(t)\cdot 0+b(t)\cdot 0=0$$
$\Rightarrow X$ è uno spazio vettoriale

Sia
$$T: X\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$x\longmapsto\begin{pmatrix}x(0)\\x'(0)\end{pmatrix}$$

i) T è lineare

$x_1(t), x_2(t)\in X$, allora $T(x_1+cx_2)=T(x_1)+cT(x_2)$
$$T(x_1(t)+cx_2(t))=\begin{pmatrix}(x_1+cx_2)(0)\\(x_1+cx_2)'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_1'(0)\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}x_2(0)\\x_2'(0)\end{pmatrix}=T(x_1(t))+cT(x_2(t))$$

ii) T è iniettiva, ossia $\operatorname{Ker}T=\{x(t)\equiv 0\}$

L'unica $x(t)$ soluzione dell'eq. diff. t.c. $\begin{cases}x(0)=0\\x'(0)=0\end{cases}$ è la funzione è nulla.
$$\begin{cases}x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0\\x(0)=0\\x'(0)=0\end{cases}$$
Per il teorema di esistenza e unicità, la soluzione esiste ed è unica

So che $x(t)\equiv 0$ è soluzione, quindi è unica.

iii) $\forall \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $\exists x(t)$ soluzione di $\begin{cases}x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0\\x(0)=v_1\\x'(0)=v_2\end{cases}$

Per il teorema di esistenza e unicità, so che la soluzione esiste.

$\Rightarrow \dim X=\dim\mathbb{R}^2=2$!! $\square$

EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti

$$x'' + a x' + b = 0$$

Chiamiamo equazione caratteristica (EC):

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

1) $\Delta > 0$: EC ha 2 soluzioni reali distinte λ_1, λ_2
   Le soluzioni sono $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
2) $\Delta > 0$: EC ha 2 soluzioni reali coincidenti $\tilde\lambda$
   Le soluzioni sono $x(t) = c_1 e^{\tilde\lambda t} + c_2 t e^{\tilde\lambda t}$
3) $\Delta < 0$: EC ha 2 soluzioni complesse distinte $\rho \pm i\omega$
   Le soluzioni sono $x(t) = c_1 e^{\rho t} \cos\omega t + c_2 e^{\rho t} \sin\omega t$

VERIFICA

1) caso $\Delta > 0$

$x(t) = e^{\lambda_1 t}$

$x'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$ $\quad x''(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$

$$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t}(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0$$

$e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ non sono proporzionali

2) caso $\Delta = 0$

$x(t) = t e^{\tilde\lambda t}$ è soluzione $\quad \tilde\lambda = -\frac{a}{2}$

$x'(t) = e^{\tilde\lambda t} + \tilde\lambda t e^{\tilde\lambda t}$ $\quad x''(t) = 2\tilde\lambda e^{\tilde\lambda t} + \tilde\lambda^2 t e^{\tilde\lambda t}$

$$2\tilde\lambda e^{\tilde\lambda t} + \tilde\lambda^2 t e^{\tilde\lambda t} + a e^{\tilde\lambda t} + a\tilde\lambda t e^{\tilde\lambda t} + b t e^{\tilde\lambda t} = t e^{\tilde\lambda t}\overbrace{(\tilde\lambda^2 + a\tilde\lambda + b)}^{=0} + e^{\tilde\lambda t}\overbrace{(2\tilde\lambda + a)}^{=0} = 0$$

3) CASO $\Delta < 0$

$\rho = -\frac{a}{2}$ $\quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \rho \pm i\omega$ $\quad \Delta = a^2 - 4b$

$x(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$

$x'(t) = \rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega e^{\rho t}\sin(\omega t)$ $\quad x''(t) = \rho^2 e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\rho\omega e^{\rho t}\sin(\omega t) - \omega^2 e^{\rho t}\cos(\omega t)$

$$e^{\rho t}\cos(\omega t)\underbrace{[\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b]}_{=\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - b - \frac{a^2}{2} + b = 0} - \omega e^{\rho t}\sin(\omega t)\underbrace{[2\rho + a]}_{=0} = 0$$

Da dove vengono?

2) In generale $x(t) = e^{\lambda t}$ $\quad \dot x(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot x(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a \cdot \lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \longrightarrow e^{\lambda t}\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0} = 0$$

Le sue radici saranno: $\tilde\lambda$ e $\tilde\lambda + h$ $(h \to 0)$

Allora possiamo scrivere:

$$(\lambda - \tilde\lambda)(\lambda - (\tilde\lambda + h)) = \lambda^2 - \lambda(\tilde\lambda + h) - \tilde\lambda\lambda + \tilde\lambda(\tilde\lambda + h) = \lambda^2 - \lambda(2\tilde\lambda + h) + \tilde\lambda^2 + \tilde\lambda h$$

$$\Rightarrow \ddot x - \dot x(2\tilde\lambda + h) + (\tilde\lambda^2 + \tilde\lambda h)x = 0 \quad \Rightarrow x(t) = c_1 e^{\tilde\lambda t} + c_2 e^{(\tilde\lambda + h)t}$$

Scelgo $c_2 = \frac{1}{h}$ e $c_1 = -\frac{1}{h}$ (scelte arbitrariamente). Sia x_h soluzione dell'eq. differenziale

Per $h \to 0$: $\lim_{h\to 0} x_h(t) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(\tilde\lambda + h)t} - e^{\tilde\lambda t}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{\tilde\lambda t} \cdot \frac{e^{ht} - 1}{h} = e^{\tilde\lambda t} \cdot t$

3) $x_1 = e^{\rho t}\sin(\omega t)$ $\quad x_2 = e^{\rho t}\cos(\omega t)$ $\quad e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \rho + \omega i$ $\quad e^{\lambda t} = e^{(\rho + \omega i)t} = e^{\rho t} \cdot e^{\omega i t} = e^{\rho t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$

Anche in questo caso. $\quad (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$

Infatti $(e^{\rho t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)))' = \rho e^{\rho t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + e^{\rho t}(-\omega\sin(\omega t) + i\omega\cos(\omega t)) =$
$= e^{\rho t}(\rho e^{i\omega t} + i\omega(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))) = (\rho + i\omega)e^{i\omega t}e^{\rho t} = \lambda e^{\lambda t}$

Allora $x(t) = e^{\lambda t}$ risolve $\ddot x + a\dot x + bx = 0$ se e solo se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Se $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$ sono soluzioni dell'eq.ne caratteristica, allora
$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni complesse dell'eq.ne diff.

$$\Rightarrow \frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{\rho t}\cos(\omega t), \quad \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{\rho t}\sin(\omega t) \quad \text{sono ancora soluzioni}$$

EDO lineari del II ordine non omogenee

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \qquad (*)$$

Lemma Sia x_1 soluzione di $(*)$ con termine noto $c_1(t)$
Sia x_2 soluzione di $(*)$ con termine noto $c_2(t)$
Allora $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ (con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) risolve $(*)$ con termine noto $c(t) = a_1 c_1(t) + a_2 c_2(t)$

Caso particolare: se x_1, x_2 risolvono l'equazione omogenea $(*_{om})$ allora $a_1x_1 + a_2x_2$ risolve $(*_{om})$

Dim ("a mano")

I) $\dot{x} = a_1\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_2$ e $\ddot{x} = a_1\ddot{x}_1 + a_2\ddot{x}_2$

II) $T: x \longmapsto \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x$ è lineare

Hp $T(x_1) = c_1 \quad T(x_2) = c_2$

$\Rightarrow T(x) = T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1c_1 + a_2x_2$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \qquad (*_{om})$

Corollario Sia $\tilde{x}$ una soluzione di $(*)$
Allora ogni soluzione x di $(*)$ si scrive come

$$x = \tilde{x} + x_{om}$$

con x_{om} soluzione dell'eq. omogenea $(*_{om})$

$$X = \{\tilde{x} + x_{om} \mid x_{om} \in X_{om}\} = X_{om} + \tilde{x}$$

EDO lineari del II ordine a coefficienti costanti non omogenee

$$x + a\dot{x} + bx = c(t) \qquad (*)$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \qquad (*_{om})$$

PROBLEMA: come trovare una soluzione $\tilde{x}$ di $(*)$

$c(t)$	$\tilde{x}(t)$	
αe^{at}: $\cdot\ a \neq \lambda_{1,2}$	βe^{at}	
$\cdot\ a = \lambda_1 \neq \lambda_2$	$\beta t e^{at}$	
$\cdot\ a = \lambda_1 = \lambda_2$	$\beta t^2 e^{at}$	
$p(t)e^{at}$: $\cdot\ a \neq \lambda_{1,2}$	$q(t)e^{at}$	con $\deg p = \deg q = d$
$\cdot\ a = \lambda_1 \neq \lambda_2$	$q(t)te^{at}$	
$\cdot\ a = \lambda_1 = \lambda_2$	$q(t)t^2e^{at}$	
$p_1(t)e^{\rho t}\cos(\omega t) + p_2(t)e^{\rho t}\sin(\omega t)$		con p_1, p_2, q_1, q_2 polinomi di grado $\leq d$
$\rho + i\omega \neq \lambda_{1,2}$	$q_1(t)e^{\rho t}\cos(\omega t) + q_2(t)e^{\rho t}\sin(\omega t)$	
$\rho + i\omega = \lambda_1 \neq \lambda_2$	$t(q_1(t)e^{\rho t}\cos(\omega t) + q_2(t)e^{\rho t}\sin(\omega t))$	

esempio $\ddot{x}-\dot{x}-6x=2e^{t}$

$\ddot{x}-\dot{x}-6x=0 \longrightarrow \lambda^2-\lambda-6=0 \longrightarrow (\lambda-3)(\lambda+2)=0 \qquad \lambda_1=3\ ,\ \lambda_2=-2$

$x_{om}=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}$

Cerco $\tilde{x}$ della forma $\tilde{x}(t)=ce^{t}$. $\tilde{x}=\dot{\tilde{x}}=\ddot{\tilde{x}}=ce^{at}$

$ce^{t}-ce^{t}-6ce^{t}=2e^{t} \longrightarrow c=-\frac{1}{3} \longrightarrow \tilde{x}=-\frac{1}{3}e^{t}$

$\Rightarrow x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{t}$

VARIANTE : $c(t)=2e^{3t}$ ma $\tilde{x}(t)=ce^{3t}$ è soluzione di $(*om)$

$\tilde{x}(t)=cte^{3t} \qquad \dot{\tilde{x}}(t)=c(3t+1)e^{3t} \qquad \ddot{\tilde{x}}(t)=c(9t+6)e^{3t}$ e sostituisco in $(*)$:

$ce^{3t}(9t+6-3t-1-6t)=2e^{3t} \longrightarrow 5c=2 \longrightarrow c=\frac{2}{5} \Longrightarrow \tilde{x}(t)=\frac{2}{5}e^{3t}$

$\Rightarrow x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t}$

esempio $\ddot{x}-2\dot{x}+x=e^{t}$

$\ddot{x}-2\dot{x}+x=0 \longrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1 \longrightarrow x_{om}=c_1e^{t}+c_2te^{t}$

Cerco $\tilde{x}$ della forma : $\tilde{x}(t)=ct^2e^{t}$

$\dot{\tilde{x}}(t)=c(t^2+2t)e^{t} \qquad \ddot{\tilde{x}}(t)=c(t^2+4t+2)e^{t}$ e sostituisco :

$ce^{t}(t^2+4t+2-2(t^2+2t)+t^2)=e^{t} \longrightarrow 2c=1 \longrightarrow c=\frac{1}{2} \longrightarrow \tilde{x}(t)=\frac{1}{2}t^2e^{t}$

$\Longrightarrow x(t)=c_1e^{t}+c_2te^{t}+\frac{1}{2}t^2e^{t}$

esempio $\ddot{x}-2\dot{x}+x=t^2 \qquad (t^2=t^2e^{0t})$

$\tilde{x}=\alpha_0+\alpha_1t+\alpha_2t^2 \qquad \dot{\tilde{x}}=\alpha_1+2\alpha_2t \qquad \ddot{\tilde{x}}=2\alpha_2$

$2\alpha_2-2\alpha_1-4\alpha_2t+\alpha_0+\alpha_1t+\alpha_2t^2=t^2$

$\alpha_2t^2+(\alpha_1-4\alpha_2)t+\alpha_0-2\alpha_1+2\alpha_2=t^2 \longrightarrow \begin{cases}\alpha_2=1\\ \alpha_1-4\alpha_2=0\\ \alpha_0-2\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\alpha_2=1\\ \alpha_1=4\\ \alpha_0=6\end{cases}$

$\rightarrow \tilde{x}(t)=t^2+4t+6$

VARIANTE : $c(t)=t^2e^{t}$

Cerco $\tilde{x}$ nella forma $\tilde{x}=(\alpha_0+\alpha_1t+\alpha_2t^2)t^2e^{t}$

TEORIA DEGLI INSIEMI

(ASSIOMI Zermelo - Frankel ZF + assioma della scelta ZFC)

operazioni con gli insiemi

Dati A, B insiemi $A \cup B$, $A \cap B$

Data $\mathcal{F}$ famiglia di insiemi: $\bigcup \mathcal{F}$ = unione di tutti gli insiemi in $\mathcal{F}$, $\bigcap \mathcal{F}$

Se $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$: $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} A_i$

$A \setminus B = A - B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ (differenza)

$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (differenza simmetrica)

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ (prodotto)

esempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$G \subset A \times B$ è il grafico associato ad una funzione $f: A \to B$ se $\forall a \in A \ \exists! b \in B$ t.c. $(a,b) \in G$
Questo unico b è chiamato $f(a)$

DEF. Una funzione f da A a B è un insieme $G \subset A \times B$ tale che
$\forall a \in A \ \exists! b \in B : (a,b) \in G$

f surgettiva $\Leftrightarrow \forall b \ \exists a : (a,b) \in G$

f surgettiva e iniettiva $\Leftrightarrow \forall b \ \exists! a : (a,b) \in G$
cioè G è il grafico di una funzione da B ad A

$A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$

$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\} \simeq \{\text{funzioni da } \{1, \dots, n\} \longrightarrow A\}$

l'insieme delle funzioni da I ad A si indica A^I

$\mathcal{P}(A) = \{\text{sottoinsiemi di } A\}$

DEF. Dato $E \subset A$ definisco la funzione indicatrice di E $\chi_E = \mathbb{1}_E : A \longrightarrow \{0,1\}$
data da $\mathbb{1}_E(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in E \\ 0 & \text{se } a \notin E \end{cases}$

Si ha $\forall E \subset A$, $\mathbb{1}_E \in \{0,1\}^A$
Inoltre ogni funzione $f: A \longrightarrow \{0,1\}$ è la funzione caratteristica di un sottinsieme $E \subset A$
Quindi ho una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{0,1\}^A$ $(= 2^A)$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \{\text{numeri naturali}\}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{\text{numeri interi}\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\} = \{\text{numeri razionali}\} = \{(p,q) \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}/_\sim = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/_\sim$
$(p,q) \sim (p', q')$ se $pq' = qp'$

$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\} = \{\text{numeri con espansione decimale infinita, non necessariamente periodica}\}/_\sim$
(definizione ok ma mancano le operazioni)

i razionali sono reali con espansione decimale periodica
($\Rightarrow$: algoritmo elementari, $\Leftarrow$: algoritmo da periodico a frazione)

Lemma $0.\overline{\underbrace{0\dots1}_{n}} = \frac{1}{10^n - 1}$

$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\}$

DEF. L'insieme A è **finito** se esiste n e una funzione bigettiva $f: I_n=\{1,\dots,n\} \longrightarrow A$ $\quad (I_0 = \emptyset)$

n viene detto numero di elementi $\quad n = \#A = |A|$

Un insieme è **infinito** se non è finito

esempio $\mathbb{N}$

Se A e B sono finiti, $\#A=\#B \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ bigettiva

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, "g\circ f^{-1}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

$g\circ f^{-1}$ è una bigezione da A a B

OSS Se A è finito $\exists!\, n$ t.c. $\exists f: I_n \longrightarrow A$ bigettiva

$\Rightarrow$ posso definire il numero di elementi

Lemma Se $\exists f: I_n \longrightarrow I_m$ bigettiva allora $n=m$.

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \\ I_m \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n

OSS $J_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq n\}$

$f: J_n \longleftrightarrow J_m \;:\; f(k) = k-n+m$ è una bigezione

DEF. Dati A e B insiemi qualunque, dico A e B sono **equipotenti** oppure hanno la **stessa cardinalità** se $\exists f: A \longrightarrow B$ bigettiva

Si scrive $|A| = |B|$ oppure $A \sim B$. Questa è una relazione d'equivalenza

ACHTUNG non esiste l'insieme di tutti gli insiemi (paradosso di Russell)

esempio $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}_{pari} \subsetneq \mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità $\left(f: k \in \mathbb{N} \longmapsto 2k \in \mathbb{N}_{pari}\right)$

DEF. A è **numerabile** se è finito oppure $|A| = |\mathbb{N}|$

Lemma A è numerabile $\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ surgettiva $\quad (A \neq \emptyset)$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: A numerabile: $\to |A| = |\mathbb{N}| \Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \to A$ bigettiva

$\searrow A$ è finito $\Leftrightarrow \exists n \;\exists f: I_n \longrightarrow A$ bigettiva

$\Rightarrow \exists f: I_n \to A \Rightarrow$ estendo f a $\mathbb{N}$ in modo arbitrario

$\Leftarrow$: $\exists f: \mathbb{N} \to A$ surgettiva, posso supporre A infinito

Costruisco $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo che $f\circ g: \mathbb{N} \longrightarrow A$ sia bigettiva

Dico che $n \sim m$ se $f(n) = f(m)$

Divido $\mathbb{N}$ in classi di equivalenza (controimmagini dei punti di A)

Costruisco $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ in modo che

ogni classe di equivalenza di $\sim$ contiene $g(n)$ per uno ed un solo n

Ad esempio. $g(0) = 0$

$g(1) = \min\{\mathbb{N} \setminus [g(0)]\}$

$g(2) = \min\{\mathbb{N} \setminus ([g(0)] \cup [g(1)])\}$ ... $\quad \square$

corollario Se $B \subset A$, A numerabile, B è numerabile

DIMOSTRAZIONE

Parto da $f: \mathbb{N} \to A$ surgettiva e costruisco $g: \mathbb{N} \longrightarrow B$ surgettiva $\Rightarrow B$ è numerabile

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in B \\ \text{quello che voglio} & \text{se } n \notin B \end{cases}$$

$\square$

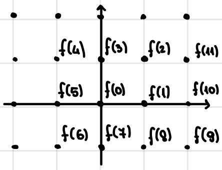
esempio ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile

esempio $\mathbb{Z}$

$\cdots\ \dot{-2}\ \dot{-1}\ \dot{0}\ \dot{1}\ \dot{2}\ \cdots$ ci sono tanti modi

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$ è una bigezione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

esempio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

f "a spirale"

esempio $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \}$

Sia $A = \{ (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid p,q \text{ primi tra loro}, q>0 \}$

$\mathbb{Q} \sim A \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dunque $\mathbb{Q}$ è numerabile

la bigezione è $f: A \longrightarrow \mathbb{Q}$ $f((p,q)) = \frac{p}{q}$

Lemma Se A si scrive come $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ e ogni A_n è finito allora A è numerabile
(unione numerabile di insiemi finiti è numerabile)

esempio $\mathcal{A}$: numeri algebrici (soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi)

sono soluzione di $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d = 0$

$A_n = \{ \text{soluz. di una qualche equazione con } d \leq n, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_d| \leq n \}$ $\#A_n \leq (2n+1)^{d+1} n$

$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Rightarrow \mathcal{A}$ è numerabile

Lemma L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile
$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ con A_n numerabile $\Rightarrow A$ è numerabile

DIMOSTRAZIONE

$\forall n$ A_n num $\Rightarrow \exists f_n: \mathbb{N} \longrightarrow A_n$ surgettiva

Sia $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow A$ data da $f(n,m) := f_n(m)$ è surgettiva

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ num $\Rightarrow \exists g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Dunque $f \circ g: \mathbb{N} \longrightarrow A$ è surgettiva $\square$

Lemma Il prodotto finito di numerabili è numerabile
$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su N

PASSO INDUTTIVO $A_1 \times \dots \times A_N$ è num $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \longrightarrow A_1 \times \dots \times A_N$ surgettiva

A_{N+1} è num $\Rightarrow \exists g: \mathbb{N} \longrightarrow A_{N+1}$ surgettiva

Sia $h: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow A_1 \times \dots \times A_N \times A_{N+1}$ $h(n,m) := (f(n), g(m))$ $\square$

Def. A è non numerabile se $\nexists f: \mathbb{N} \to A$ surgettiva

Proposizione $\mathbb{R}$ non è numerabile

DIMOSTRAZIONE

Data $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ esiste x t.c. $x \notin f(\mathbb{N}^*)$ (cioè f non è surgettiva)

Costruisco $x = 0,x_1x_2x_3\dots$ (cifre decimali)

Prendo $x_1 \neq$ prima cifra decimale di $f(1)$ $(\neq 9)$

$x_2 \neq$ seconda cifra decimale di $f(2)$ $(\neq 9)$

... (costruzione per induzione)

$\Rightarrow x \neq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\square$

Proposizione $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non è numerabile

DIMOSTRAZIONE

Data $f: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ costruisco $E \subset \mathbb{N}$ t.c. $E \neq f(n)$ $\forall n$: $E := \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$

Se $f(0) \ni 0$, allora $0 \notin E$

Se invece $f(0) \not\ni 0$, allora $0 \in E$

Se $f(n) \ni n$, allora $n \notin E$

Se invece $f(n) \not\ni n$, allora $n \in E$

$\Rightarrow f(n) \neq E$ $\square$

Def. $|A| = |B| \underset{def}{\Leftrightarrow} \exists f: A \to B$ bigettiva

$|A| \leq |B|$ significa che $\exists f: A \to B$ iniettiva

<u>Oss</u> sono fatti equivalenti:

(i) $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ iniettiva

(ii) $\exists B' \subset B$ con $A \sim B'$

(iii) $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists g: B \to A$ surgettiva

Lemma Data $f: A \to B$ iniettiva

$\exists g: B \to A$ t.c. $g \circ f: A \to A$ $\quad g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$

g si chiama inversa sinistra di f

In particolare g è surgettiva

DIMOSTRAZIONE

$f: A \to B$ iniettiva allora $f: A \to f(A) \subset B$ è bigettiva

quindi ha l'inversa $f^{-1}: f(A) \to A$

prendo $g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{se } b \in f(A) \\ * & \text{se } b \notin f(A) \end{cases}$ $\square$

Lemma Data $f: A \to B$ surgettiva

$\exists g: B \to A$ t.c. $f \circ g: B \to B$ $\quad f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$

g si chiama inversa destra di f

Def. $|A| \lneq |B|$ se $|A| \leq |B|$ e $|A| \neq |B|$

Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ allora $|A| = |B|$
cioè se $\exists f: A \to B$ iniettiva e $\exists g: B \to A$ iniettiva
allora $\exists h: A \to B$ bigettiva

esempio $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

1) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ cioè esiste $f: \underset{2}{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ iniettiva

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{$funzioni da $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}\} = \{$sequenze infinite di 0 e 1$\}$ $(E \longmapsto \mathbb{1}_E)$

$f: (x_0, x_1, \dots) \longmapsto 0{,}x_0x_1\dots$ oppure $f: E \longmapsto 0{,}x_0x_1\dots$ con $x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in E \\ 0 & \text{se } n \notin E \end{cases}$

2) $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ cioè esiste $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{R} \sim (0,1)$ $x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$ quindi considero $g: (0,1) \longrightarrow \{$sequenze di 0 e 1$\}$

$\underset{(0,1)}{\overset{\cap}{x}} = ($sequenza delle cifre di x dopo la virgola in base 2$)$

esercizio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$

Dim

$\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$

esercizio Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ esplicito non algebrico

esercizio $\forall A$ $|A| \lneq \mathcal{P}(A)$

DIMOSTRAZIONE

Si può costruire f iniettiva, ad esempio $x \longmapsto \{x\}$ $\forall x \in A$

Quindi $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$

Sia ora $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$

COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

"modello" dei numeri reali

$\mathbb{R} = \{$numeri con segno ed espansione decimale infinita$\}$

- difetto: somma e prodotto sono definiti solo per i numeri con espansione decimale finita (andrebbero definiti per tutti i numeri)
- vanno esclusi i numeri con 9 da un certo punto in poi (relazione di equivalenza)

L'ordine è ben definito $\quad x \leq y$

DEF. L'insieme dei numeri reali estesi è

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

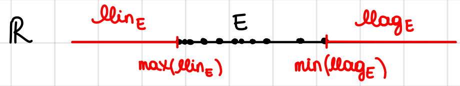
L'ordine è definito anche su $\overline{\mathbb{R}}$

Somma e prodotto sono definiti solo per $x, y \in \mathbb{R}$ (altrimenti $\mathbb{R}$ non sarebbe più un gruppo)

DEF. Dato $E \subset \mathbb{R}$ $(E \neq \emptyset)$, definisco l'insieme dei maggioranti e dei minoranti di E:

$\mathcal{M}ag_E = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y \ \forall x \in E\}$ $\quad$ (" $E \leq y$ ")

$\mathcal{M}in_E = \{y \in \mathbb{R} : x \geq y \ \forall x \in E\}$ $\quad$ (" $E \geq y$ ")



$$\inf E := \begin{cases} \max(\mathcal{M}in_E) & \text{se } \mathcal{M}in_E \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } \mathcal{M}in_E = \emptyset \end{cases}$$

$$\sup E := \begin{cases} \min(\mathcal{M}ag_E) & \text{se } \mathcal{M}ag_E \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } \mathcal{M}ag_E = \emptyset \end{cases}$$

Fatti ovvi

Se $\max E$ esiste, $\max E = \sup E$

Se $\min E$ esiste, $\min E = \inf E$

Se $\sup E \in E$, allora $\sup E = \max E$

Se $\inf E \in E$, allora $\inf E = \min E$

Teorema $\quad$ Ogni $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, ammette $\sup E$ e $\inf E$ (in $\overline{\mathbb{R}}$)

ACHTUNG $\quad$ Questo non vale se sostituisco $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$

esempio $\quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\} \qquad \mathcal{M}in_E = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq \sqrt{2}\}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostro l'esistenza dell'inf

Suppongo $\mathcal{M}in_E \neq \emptyset$ (altrimenti $\inf E = -\infty$)

Sia n_0 il più grande intero minorante di E (cioè $n_0 = \max(\mathcal{M}in_E \cap \mathbb{Z})$)

Suppongo $n_0 \geq 0$ (analogo con $n_0 < 0$, prendendo a_i il più piccolo possibile)

Prendo $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ più grande possibile t.c. $n_0, a_1 \in \mathcal{M}in_E$

Prendo $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ più grande possibile t.c. $n_0, a_1 a_2 \in \mathcal{M}in_E$

... (costruzione per induzione)

$y = n_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ è $\inf E$

Verificare: $\quad y \in \mathcal{M}in_E$

$\qquad\qquad\quad y = \max(\mathcal{M}in_E)$

corollario assioma di completezza Dati $E, F \subset \mathbb{R}$, $E, F \neq \emptyset$, t.c. $x \leq y \ \forall x \in E, \forall y \in F$ $(E \leq F)$, allora $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $E \leq x \leq F$

DIMOSTRAZIONE

$x = \sup E$ oppure $x = \inf F$ oppure $\sup E \leq x \leq \inf F$

Infatti se $x = \sup E$: $x \leq \mathcal{M}ag_E \supset F \Rightarrow x \leq F$ $\square$

Impostazione alternativa:

Dato $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, definisco

$$\mathcal{M}ag_E := \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid E \leq y\} \quad e \quad \mathcal{M}in_E := \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid E \geq y\}$$

$$\sup E := \min(\mathcal{M}ag_E) \qquad \inf E := \max(\mathcal{M}in_E)$$

unicità di R

Def. Dato X e una relazione $x_1 \leq x_2$ t.c.

(1) $x \leq x \ \forall x \in X$

(2) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(3) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

(4) dati $x, y \in X$, vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$

Una relazione $\leq$ che soddisfa queste proprietà si chiama ordinamento totale

Se non vale (4), si chiama ordinamento parziale

X si dice insieme ordinato.

esempio Dato A, $\mathcal{P}(A)$: $\subseteq$ è di ordinamento parziale

Def. Dato X ordinato e $E \subset X$, si definiscono

$\max E$ e $\min E$ (possono non esistere)

$\mathcal{M}ag_E$ e $\mathcal{M}in_E$

$\sup E$ e $\inf E$ (possono non esistere)

Def. X è completo se vale l'assioma di completezza:

dati $E, F \subset X$, $E \leq F$ $\exists x \in X$ t.c. $E \leq x \leq F$

Teorema Dato X ordinato, sono fatti equivalenti:

(i) vale l'assioma di completezza, ossia

$\forall E, F \subset X$, $E, F \neq \emptyset$ t.c. $E \leq F$, $\exists x \in X$ t.c. $E \leq x \leq F$

(ii) dato $E \subset X$, $E \neq \emptyset$, limitato superiormente $(\mathcal{M}ag_E \neq \emptyset)$, esiste $\sup E = \min \mathcal{M}ag_E$

(iii) dato $E \subset X$, $E \neq \emptyset$, limitato inferiormente $(\mathcal{M}in_E \neq \emptyset)$, esiste $\inf E = \max \mathcal{M}in_E$

Def. X campo (operazioni: $+, \cdot$) con ordinamento ($\leq$) t.c.

(1) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall x,y,z \in X$

(2) $x \leq y,\ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz \quad \forall x,y \in X$

si dice **campo ordinato**

Oss $\mathbb{C}$ non si ordina "naturalmente", ossia rispettando le operazioni

Se esistesse un ordinamento $\leq$

Se fosse $i < 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow 1 < 0$ ↯

Se fosse $i > 0 \Rightarrow i \cdot i > 0 \cdot i \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow 1 < 0$ ↯

Teorema Sia X campo ordinato e completo.
Allora X è isomorfo a $\mathbb{R}$, cioè
$\exists\, \varphi : \mathbb{R} \to X$ che preserva l'ordine $(a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b))$
e le operazioni $(\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b))$

Traccia DIMOSTRAZIONE

Proposizione Dato X campo ordinato, esiste $\mathbb{Q}_X$ sottocampo ordinato isomorfo a $\mathbb{Q}$

Proposizione X campo ordinato completo è archimedeo, cioè dati $a, b \in X,\ a, b > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}_X$ t.c. $na \geq b$

Proposizione $\mathbb{Q}_X$ è denso in X, cioè $\forall a, b \in \mathbb{Q}_X,\ a < b\ \exists\, q \in \mathbb{Q}_X$ t.c. $a < q < b$

Costruzione di $\varphi : \mathbb{R} \to X$

Si parte dall'isomorfismo $\varphi' : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_X$

e lo si estende a $\varphi : \mathbb{R} \to X$ usando la completezza.

SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

DEF. Una successione in $\mathbb{R}$ è una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Non si scrive f, ma si indica la successione come $(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$

$x_0 = f(0)$, $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$

Ma anche $(x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n=1,\dots} = (x_n)$

esempio $(0, 1, 4, 9, \dots) = (n^2)_{n=0,1,\dots}$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) = (\frac{1}{n})_{n=1,2,\dots}$

$(1, 2, 3, 4, \dots) \neq (2, 1, 3, 4, \dots)$

DEF. Data una successione $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, una sua sottosuccessione è una successione estratta dalla prima, scegliendo solo alcuni elementi:

$(x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots) = (x_{n_k})_{k=0,1,\dots}$ con $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$

Ossia, data una successione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, una sua sottosuccessione è $f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente

DEF. Dato $L \in \mathbb{R}$, dico che $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| \leq \varepsilon$

Dico che $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ se

$\forall M \ \exists n_M$ t.c. $n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$

Dico che $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ se

$\forall M \ \exists n_M$ t.c. $n \geq n_M \Rightarrow x_n \leq M$

DEF. Dato $x \in \mathbb{R}$, un intorno di x è un intervallo della forma

$I = [x-r, x+r]$ con $r > 0$

Un intorno di $+\infty$ è un intervallo nella forma

$I = [M, +\infty]$

Un intorno di $-\infty$ è un intervallo nella forma

$I = [-\infty, M]$

DEF. Dico che $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \overline{\mathbb{R}}$ se

per ogni intorno I di L esiste n_I t.c. $n \geq n_I \Rightarrow x_n \in I$, ossia $x_n \in I$ definitivamente in n

esempio $x_n = 23 \ \forall n \quad x_n \longrightarrow 23$

$x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Leftarrow \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$x_n = n^2 \longrightarrow +\infty \Leftarrow x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$x_n = \log \frac{1}{n} \longrightarrow -\infty \Leftarrow \log x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

$x_n = (-1)^n$ non ha limite per $n \to +\infty$

$x_n = \begin{cases} +1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

> **Proposizione** Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$
> se $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$ allora $x_n = f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$

ACHTUNG $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(\pi x)$ non esiste ma $x_n = \sin(\pi n) = 0$ ha limite 0

DEF. Sia $P(n)$ proposizione che ha come parametro $n \in \mathbb{N}$

Dico che "$P(n)$ è vera definitivamente (in n)" se esiste $\bar{n}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$

Dico che "$P(n)$ è vera frequentemente (in n)" se $P(n)$ è vera per infiniti n.

Proposizione Il limite di una successione, se esiste, è unico

DIMOSTRAZIONE

Prendo $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $L_1 \neq L_2$

Prendo I_1 intorno di L_1 e I_2 intorno di L_2 t.c. $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ (assioma di separazione)

$\Rightarrow (x_n)$ non può appartenere definitivamente a I_1 e I_2

Supponiamo per assurdo che $\exists n_1$ t.c. $n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in I_1$, $\exists n_2$ t.c. $n \geq n_2 \Rightarrow x_n \in I_2$

Perciò $n \geq \max(n_1, n_2) \Rightarrow x_n \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$ $\lightning$ $\square$

Proposizione Se $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$, allora ogni sottosuccessione $x_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} L$

DIMOSTRAZIONE

$\forall I$ intorno di L $\exists n_I$ t.c. $n \geq n_I \Rightarrow x_n \in I$

Siccome $n_1 < n_2 < \dots$, $\exists \bar{k}$ t.c. $n_{\bar{k}} \geq n_I$ quindi $k \geq \bar{k} \Rightarrow n_k > n_{\bar{k}} \geq n_I \Rightarrow x_{n_k} \in I$ $\square$

esempio Sia $x_n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

Allora (x_n) non ha limite per $n \to +\infty$

Infatti la sottosuccessione $(x_{2n}) \longrightarrow 1$ e $(x_{2n+1}) \longrightarrow -1$

Def. Una successione (x_n) si dice **monotona** se è crescente o decrescente

Teorema Se (x_n) è monotona, allora esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n =: L \in \overline{\mathbb{R}}$

DIMOSTRAZIONE

Per (x_n) crescente

Prendo $E := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $L := \sup E$

Dimostro che $x_n \longrightarrow L$.

Prendo I intorno di L. Scrivo $I = [a, b]$: so che $a < L = \sup E = \min \mathrm{Mag}_E \Rightarrow a \notin \mathrm{Mag}_E$

$\Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $x_{\bar{n}} > a \Rightarrow x_n > a \ \forall n \geq \bar{n}$

Inoltre $x_n \leq L \Rightarrow x_n \in (a, L] \subset I \quad \forall n \geq \bar{n}$ $\square$

Def. (x_n) è una **successione di Cauchy** se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$

Lemma Date $(x_n), (y_n), (z_n)$, $x_n \longrightarrow L$ e $z_n \longrightarrow L$,
e $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $y_n \longrightarrow L$
$(x_n \longrightarrow +\infty$ e $x_n \leq y_n \Rightarrow y_n \longrightarrow +\infty$ // $z_n \longrightarrow -\infty$ e $y_n \leq z_n \Rightarrow y_n \longrightarrow -\infty)$

DIMOSTRAZIONE

$x_n \longrightarrow L$, $z_n \longrightarrow L \Rightarrow \exists I$ int. di L esiste n_I t.c. $x_n, z_n \in I$ per $n \geq n_I$

$\Rightarrow y_n \in [x_n, z_n] \subset I$ per $n \geq n_I$ $\square$

Lemma Siano $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ successione decrescente di intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$

(i) $\bigcap I_n = [a,b]$ con $a = \sup\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $b = \inf\{b_n\} = \lim_{n\to+\infty} b_n$

(ii) se inoltre $b_n - a_n = \text{lung}(I_n) \longrightarrow 0$, allora $a = b$ e $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{a\}$

e data (x_n) t.c. $x_n \in I_n \ \forall n$, allora $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a = b$

DIMOSTRAZIONE

(i) Devo dimostrare $\bigcap I_n = [a,b]$: $\bigcap I_n \supset [a,b]$ e dato $x \notin [a,b]$ $\exists n$ t.c. $x \notin I_n$

a) $I_n = [a_n, b_n] \supset [a,b]$ perché $a_n \le a$ e $b \le b_n$ per ogni n

$\Rightarrow \bigcap I_n \supset [a,b]$

b) Dato $x \notin [a,b] \Rightarrow \underline{x > b} \vee x < a$ (uguale) $\Rightarrow x$ non è un minorante di $\{b_n\}$

$\Rightarrow \exists n$ t.c. $b_n < x \Rightarrow x \notin I_n \Rightarrow x \notin \bigcap I_n$

(ii) $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow 0 \le b - a \le b_n - a_n \longrightarrow 0 \Rightarrow b - a = 0$

$a \leftarrow a_n \le x_n \le b_n \longrightarrow b = a \Rightarrow x_n \longrightarrow a$ □

Teorema (x_n) ammette limite reale L se e solo se (x_n) è una successione di Cauchy

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| \le \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon \le x_n \le L + \varepsilon$

quindi $\forall n,m$ $|x_n - x_m| \le 2\varepsilon \Rightarrow (x_n)$ è di Cauchy

$\overset{(1)}{\Leftarrow}$: uso che (x_n) è di Cauchy per costruire una successione decrescente di intervalli chiusi I_n t.c. $x_n \in I_n$ e lungh$(I_n) = 0$

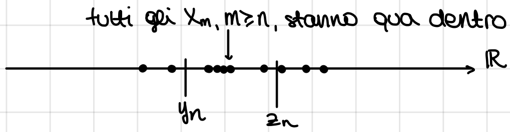
Dato k intero $\exists n_k$ t.c. $m,n \ge n_k \Rightarrow |x_n - x_m| \le \frac{1}{k} \Rightarrow |x_{n_k} - x_n| \le \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} - \frac{1}{k} \le x_n \le x_{n_k} + \frac{1}{k}$

Pongo $J_k := [x_{n_k} - \frac{1}{k}, x_{n_k} + \frac{1}{k}]$ (lungh$(J_k) = \frac{2}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$) e $x_n \in J_k \ \forall n \ge n_k$

Prendo $I_n := J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n$

$\overset{(2)}{\Leftarrow}$: Data (x_n) successione in $\mathbb{R}$, definisco:

$y_n := \inf\{x_m, m \ge n\}$ $\quad z_n := \sup\{x_m, m \ge n\}$



Allora:

(i) $y_n \le x_n \le z_n$

(ii) (y_n) cresce e (z_n) decresce $\Rightarrow y_n \longrightarrow L := \sup\{y_n\}$ e $z_n \longrightarrow L' := \inf\{z_n\}$ e $L \le L'$

(iii) Se (x_n) è di Cauchy allora $L = L'$, quindi per confronto $x_n \longrightarrow L$

Resta da dimostrare che $L = L'$.

Siccome (x_n) è di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $|x_n - x_m| \le \varepsilon$ se $n, m \ge n_\varepsilon$

In particolare $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \le \varepsilon \ \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \le x_n \le x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \ \forall n \ge n_\varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \le \inf\{x_n, n \ge n_\varepsilon\} \le \sup\{x_n, n \ge n_\varepsilon\} \le x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \le y_{n_\varepsilon} \le z_{n_\varepsilon} \le x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \le y_{n_\varepsilon} \le L \le L' \le z_{n_\varepsilon} \le x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \le L \le L' \le x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \Rightarrow L' - L \le 2\varepsilon$ ma $L' - L$ non dipende da ε

$\Rightarrow L' - L = 0$ (siccome ε è arbitrario, $L' - L \le \inf\{2\varepsilon, \varepsilon > 0\} = 0$)

$\Rightarrow L' = L$ □

<u>OSS</u> La dimostrazione usa solo questa proprietà di (x_n):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \le \varepsilon \quad n \ge n_\varepsilon$

Def. Data (x_n) successione in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definisco: $y_n = \inf\{x_m, m \geq n\}$

$z_n = \sup\{x_m, m \geq n\}$

Allora: (i) $y_n \leq x_n \leq z_n$

(ii) $y_n \longrightarrow L := \sup\{y_n\}$ $\quad z_n \longrightarrow L' := \inf\{z_n\}$

Definisco: $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L$

$\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L'$

Proposizione $L = \limsup x_n$ e $L' = \liminf x_n$ esistono sempre e $L \leq L'$

(x_n) ha limite se e solo se $L = L'$ (in tal caso $\lim x_n = L$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon \leq x_n \leq L' + \varepsilon$

$\exists (x_{n_k})$ sottosuccessione di (x_n) t.c. $x_{n_k} \longrightarrow L$, $\exists (x_{n_h})$ sottosuccessione di (x_n) t.c. $x_{n_h} \longrightarrow L'$

$\forall (x_{n_k})$ sottosuccessione convergente di (x_n), allora $L \leq \lim x_{n_k} \leq L'$

esempio $\quad x_n = (-1)^n$

$y_n = -1 \quad z_n = 1 \quad \Longrightarrow L = -1,\ L' = 1$

esempio $\quad x_n = \sin(\sqrt{n})$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$

$\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +1 \qquad \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$

$\forall L \in [-1, 1] \ \exists (x_{n_k})$ t.c. $x_{n_k} \longrightarrow L$

lo stesso vale per $x_n = \sin(n)$

DEF. Una successione (x_n) si dice limitata se $\exists\, a,b$ t.c. $a \le x_n \le b \quad \forall n$

Teorema di Bolzano-Weierstraß

(i) Data (x_n) successione in $\mathbb{R}$ limitata, esiste (x_{n_k}) sottosuccessione t.c. $x_{n_k} \longrightarrow L \in \mathbb{R}$

(ii) Data (x_n) successione in $\overline{\mathbb{R}}$, esiste (x_{n_k}) sottosuccessione t.c. $x_{n_k} \longrightarrow L \in \overline{\mathbb{R}}$

DIMOSTRAZIONE

(i) Sia $I_0 = [a,b]$ $(x_n \in I_0 \ \forall n)$

Divido I_0 in due metà: $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

Chiamo I_1 una delle due metà t.c. $x_n \in I_1$ per infiniti n

Chiamo I_2 una delle due metà di I_1 t.c. $x_n \in I_2$ per infiniti n

... (costruzione per induzione)

$n_0 = 0$

Prendo $n_1 > n_0$ t.c. $x_{n_1} \in I_1$

Prendo $n_2 > n_1$ t.c. $x_{n_2} \in I_2$

Alla fine ho costruito una successione decrescente di intervalli

$$\begin{array}{ccccccccc} I_0 & \supset & I_1 & \supset & I_2 & \supset & I_3 & \supset \dots \supset & I_k = [a_k, b_k] \supset \dots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ x_{n_0} & & x_{n_1} & & x_{n_2} & & x_{n_3} & & \end{array}$$

Siccome $\text{lung}(I_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

allora x_{n_k} converge

$a_k \longrightarrow a = \sup\{a_k\}$

$b_k \longrightarrow b = \inf\{b_k\}$

$a = b$

(ii) Il secondo punto può essere dimostrato applicando la stessa tecnica di (i), costruendo una successione di intervalli $I_n = [a_n, +\infty)$ oppure $J_n = (-\infty, b_n]$ (nel caso si trovasse un intervallo $[a,b]$, ci si riconduce a (i)) tali che $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ oppure $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Altrimenti ci si può ricondurre al caso (i) utilizzando la bigezione:

$f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [0,1]$ con $f^{-1} : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x = +\infty \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = -\infty \end{cases} \qquad y \longmapsto \begin{cases} +\infty & \text{se } y = 1 \\ \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) & \text{se } 0 < y < 1 \\ -\infty & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$\square$

successioni per ricorrenza

DEF. Una successione per ricorrenza è una successione definita per ricorsione.

Una successione si dice autonoma se è del tipo: $\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$

$x_1 = f(x_0) = f(c)$
$x_2 = f(x_1) = f(f(c))$
$\vdots$
$x_n = f(f(\dots f(c)\dots))$

Una successione si dice non autonoma se è del tipo: $\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = f(n, x_{n-1}) \end{cases}$

DEF. Un'equazione alle differenze di ordine k è un'equazione del tipo.

$$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n)$$

DEF. Una successione per ricorsione di ordine k è:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 \\ x_1 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha_k \\ x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

Autonome, I ordine, lineari, omogenee

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = a x_{n-1} \end{cases}$$

$x_1 = ac$
$x_2 = a x_1 = a^2 c$
$\vdots$
$x_n = a^n c$

Si dimostra per induzione che: $x_n = a^n c$

- $x_1 = ac$
- vera fino a n: $x_{n+1} = a x_n = a^{n+1} c$

Autonome, I ordine, lineari, non omogenee

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = a x_{n-1} + b \end{cases}$$

$x_1 = ac + b$
$x_2 = a^2 c + ab + b$
$x_3 = a^3 c + a^2 b + ab + b$
$\vdots$
$x_n = a^n c + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \dots + ab + b$
$x_n = a^n c + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

<u>OSS</u> $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a-1}$ se $a \neq 1$

Infatti $(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = a^n + a^{n-1} + \dots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \dots - a - 1 = a^n - 1$

Si dimostra per induzione che: $x_n = a^n c + b\frac{a^n - 1}{a-1}$ se $a \neq 1$
$x_n = c + nb$ se $a = 1$

- se $a \neq 1$ $x_n = a^n c + b\frac{a^n - 1}{a-1}$

  $x_1 = ac + b$
- vera fino a n-1: $x_n = a x_{n-1} + b = a\left(a^{n-1} c + b\frac{a^{n-1} - 1}{a-1}\right) + b =$

  $= a^n c + b\frac{a^n - a + a - 1}{a-1} = a^n c + b\frac{a^n - 1}{a-1}$

$V = \{\text{successioni}\}$ è spazio vettoriale
Data la ricorrenza $x_n = a x_{n-1}$ (*),
$X = \{(x_n)$ che soddisfano (*)$\}$ è uno spazio vettoriale

Lemma Se $(x_n), (y_n)$ soddisfano (*)
$c \in \mathbb{R}$, allora $(x_n) + c(y_n)$ soddisfa (*)
e $(x_n) = (0)$ soddisfa (*)

Lemma (x_n) soddisfa (*)
(y_n) soddisfa $x_n = a x_{n-1} + b$
Allora $(x_n) + (y_n)$ soddisfa $x_n = a x_{n-1} + b$
(Equivalentemente) Se (x_n) soddisfa $x_n = a x_{n-1} + b_1$
e (y_n) soddisfa $x_n = a x_{n-1} + b_2$
allora $(x_n) + (y_n)$ soddisfa $x_n = a x_{n-1} + b_1 + b_2$

esempio
$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = a x_{n-1} + b \end{cases}$$
$x_n = a x_{n-1} + b$
- $x_n = a x_{n-1}$ trovo x_n^{om}
- trovo sol. particolare di $x_n = a x_{n-1} + b$

$x_n^{om} = A a^n$
Cerco $(\tilde{x}_n)$ del tipo $\tilde{x}_n = \ell$
$$\ell = a\ell + b \Rightarrow \ell(1-a) = b \Rightarrow \ell = \frac{b}{1-a}$$
$$\Rightarrow x_n = A a^n + \frac{b}{1-a}$$
$$x_0 = c = A + \frac{b}{1-a} \Rightarrow A = c - \frac{b}{1-a}$$
La soluzione è $x_n = \left(c - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$

Autonome, II ordine(ordine k), lineari, omogenee

$$P \begin{cases} x_0 = \alpha_0 \\ x_1 = \alpha_1 \\ x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \quad (*) \end{cases}$$
Eq.ne caratteristica:
$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

$$P \begin{cases} x_0 = \alpha_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha_{k-1} \\ x_{n+k} = a_{k-1} x_{n+k-1} + a_{k-2} x_{n+k-2} + \dots + a_0 x_n \quad (*) \end{cases}$$
Eq.ne caratteristica:
$$\lambda^k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda^i = a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + a_0$$

(i) λ_1, λ_2 soluzioni
(x_n^1) di termine n-esimo λ_1^n risolve (*)
(x_n^2) di termine n-esimo λ_2^n risolve (*)
Verifichiamo: $x_n = \lambda_1^n \quad x_{n+1} = \lambda_1^{n+1} \quad x_{n+2} = \lambda_1^{n+2}$
$$\lambda_1^{n+2} - a\lambda_1^{n+1} - b\lambda_1^n = \lambda_1^n(\lambda_1^2 - a\lambda_1 - b) = 0$$

(ii) λ_3 soluzione di molteplicità 2 di EC
(x_n^1) di termine n-esimo λ_3^n risolve (*)
(x_n^2) di termine n-esimo $n\lambda_3^n$ risolve (*)
Verifichiamo: $x_n = n\lambda_3^n \quad x_{n+1} = (n+1)\lambda_3^{n+1} = n\lambda_3^{n+1} + \lambda_3^{n+1} \quad x_{n+2} = (n+2)\lambda_3^{n+2} = n\lambda_3^{n+2} + 2\lambda_3^{n+2}$
$$n\lambda_3^{n+2} + 2\lambda_3^{n+2} - an\lambda_3^{n+1} - a\lambda_3^{n+1} - bn\lambda_3^n = n\lambda_3^n(\underbrace{\lambda_3^2 - a\lambda_3 - b}_{=0}) + \lambda_3^{n+1}(\underbrace{2\lambda_3 - a}_{=0}) = 0$$

(iii) $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\omega}$

(x_n^1) di termine n-esimo $\rho^n \sin(\omega n)$

(x_n^2) di termine n-esimo $\rho^n \cos(\omega n)$

Nel caso di ordine k:

(i) λ reale di molt. m

(x_m^j) con $x_n^j = n^{j-1}\lambda^n$ $\quad j = 1, \dots, m$

(ii) z complessa di molt. m : $z = \rho e^{i\omega}$ ($\bar{z}$ complessa di molt. m : $\bar{z} = \rho e^{-i\omega}$)

(x_n^j) con $x_n^j = n^{j-1}\rho^n \cos(\omega n)$ $\quad x_n^j = n^{j-1}\rho^n \sin(\omega n)$ $\quad j = 1, \dots, m$

Teorema $X = \{(x_n)$ soluzione della ricorrenza lineare di ordine k $(*)\}$ è uno spazio vettoriale di dimensione k.

DIMOSTRAZIONE

(1° modo): costruisco $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ isomorfismo

$$(x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

i) T è lineare

ii) T è iniettiva

iii) T è suriettiva

(P) ha un'unica soluzione

(2° modo): Esibisco una base B di X

$B = \{(x_n^1), (x_n^2), \dots, (x_n^k)\}$

(x_n^1) soddisfa $(*)$, $x_0 = 1$, $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$

(x_n^2) soddisfa $(*)$, $x_1 = 1$, $x_0 = x_2 = \dots = x_{k-1} = 0$

$\vdots$

(x_n^k) soddisfa $(*)$, $x_0 = \dots = x_{k-2} = 0$, $x_{k-1} = 1$

i) lineare indipendenza

$\lambda_1(x_n^1) + \dots + \lambda_k(x_n^k) = (0)$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $\quad \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Valuto nei primi k-elementi:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_0^1 + \lambda_2 x_0^2 + \dots + \lambda_k x_0^k = \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{k-1}^1 + \lambda_2 x_{k-1}^2 + \dots + \lambda_k x_{k-1}^k = \lambda_k = 0 \end{cases}$$

ii) $\mathrm{Span}((x_n^1), \dots, (x_n^k)) = X$

Sia $(z_n) \in X$, (z_n) soddisfa $(*)$

Voglio far vedere che $(z_n) = \lambda_1(x_n^1) + \dots + \lambda_k(x_n^k)$ per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

I primi k elementi di (z_n) sono

$z_0 = \alpha_0$, $z_1 = \alpha_1$, ..., $z_{k-1} = \alpha_{k-1}$ con $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$

$z_i = \alpha_i \cdot x_i^{i+1}$ $\quad i = 0, \dots, k-1$

In generale: $z_n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_n^{i+1}$

Considero (y_n) con $y_n = z_n - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_n^{i+1}$

(y_n) soddisfa $(*)$ perché X è spazio vettoriale

Si verifica che $y_0 = \dots = y_{k-1} = 0$

Ma allora $(y_n) = (0)$

Se ci fosse $y_{\bar{n}}$, primo elemento non nullo di (y_n),

$y_{\bar{n}} = \sum c_i y_{\bar{n}-i} = 0$ $\lightning$

$\Longrightarrow z_n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_n^{i+1}$

$\Longrightarrow \dim X = k$

$\square$

esempio Successione di Fibonacci

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \end{cases}$$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$(x_n^1): \quad x_n^1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$(x_n^2): \quad x_n^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$x_n^{om} = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 = c_1 + c_2 \\ x_1 = 1 = c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \varphi$

Le ODE si possono discretizzare (approssimare) con le equazioni alle differenze finite

I ordine: $x(t) \quad x'(t)$

$t = nh$ h piccolo

$x_n := x(nh) = x(t)$

$x_{n+1} = x((n+1)h) = x(nh+h) = x(t+h)$

$x'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \qquad h\,x'(t) = x(t+h) - x(t) = x_{n+1} - x_n$

$x'(t) = x(t) \qquad x(t) = ce^t$

$h\,x'(t) = h\,x(t) \longrightarrow x_{n+1} - x_n = h x_n$

$x_{n+1} = (1+h)\,x_n$

$\Rightarrow x_n = c\,(1+h)^n \qquad x(nh) = c(1+h)^n$

$x(t) = \lim_{h\to 0} c\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^t = ce^t$

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\log(1+h)} \overset{\log(1+h)\sim h}{=} \lim_{h\to 0} e = e$$

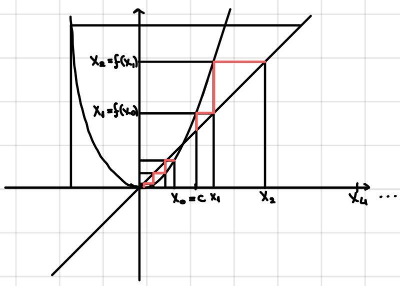
esempio

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Come visualizzo i termini di (x_n)?

$$\begin{cases} f(x) = x^4 \\ y = x \end{cases}$$

Chiamo punti fissi di f le x per cui $f(x) = x$



Se $x_0 > 1, x_0 < -1 \Rightarrow x_n \longrightarrow +\infty$

Se $-1 < x_0 < 1 \Rightarrow x_n \longrightarrow 0$

Se $x_0 = 1, -1 \Rightarrow x_n \longrightarrow 1$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Claim $x_n \longrightarrow 0$

i) $0 \le x_n \le \frac{1}{2}, \; x_n \le x_{n-1}$

ii) $\exists \ell$ t.c. $x_n \longrightarrow \ell, \; \ell \in [0, \frac{1}{2}]$

iii) $\ell = 0$

i) Per induzione:

· $x_1 = \frac{1}{16}$

· Vera $\forall n$, $\quad x_{n+1} = \overset{0\ \le}{x_n^4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{2}$

· $x_1 = \frac{1}{16} < \frac{1}{2} = x_0$

$\quad x_{n+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \le x_n \le 1}}{x_n^4} \le x_n$

"Quando abbiamo tutto continuo, ℓ dev'essere un punto fisso di f."

$x_n \longrightarrow \ell, \quad x_n^4 \longrightarrow \ell$

$x_{n+1} \longrightarrow \ell$

$\overset{\|}{x_n^4} \longrightarrow \ell^4 \implies \ell = \ell^4 \implies \ell(\ell^3 - 1) = 0 \implies \underline{\ell = 0} \vee \ell = 1$

$x_0 = c > 1$

i) $x_n > 1$

$\quad x_{n+1} \ge x_n$

ii) $\exists \ell$ t.c. $x_n \longrightarrow \ell$

iii) $\ell = +\infty$

Se $x_0 \in (-1, 0)$, $x_0 \in (-\infty, -1)$

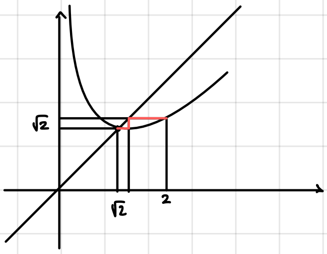
$x_0 < 0 \implies x_1 = (x_0)^4 > 0$

esempio

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

punti fissi: $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

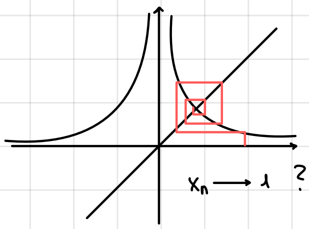


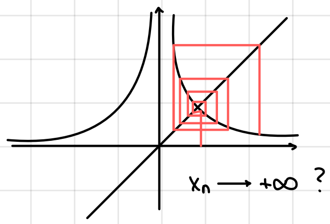
i) $\sqrt{2} \le x_n \le 2$

ii) $x_n \le x_{n-1}$

iii) $\ell = \sqrt{2}$

esempio $\quad x_n = \frac{1}{(x_{n-1})^2}$





$g(x) = (f \circ f)(x) = x^4$

$x_{2n} = g(x_{2n-2}) = x_{2n-2}^4$

$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = x_{2n-1}^4$

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{x_{n-1}^2} \\ x_0 = c > 1 \end{cases}$$

• $\begin{cases} x_{2n} = (x_{2n-2})^4 \\ x_0 = c > 1 \end{cases}$ $\qquad$ • $\begin{cases} x_{2n+1} = x_{2n-1}^4 \\ x_1 = \frac{1}{c^2} < 1 \end{cases}$

$x_{2n} \longrightarrow +\infty \qquad x_{2n+1} \longrightarrow 0$

$\implies x_n$ non ammette limite

FUNZIONI CONTINUE

Tutto uguale al I semestre ma uso gli intorni

DEF. Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, data $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dato $\bar{x} \in X$,
dico che **f è continua in $\bar{x}$** se
$\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(X \cap J) \subset I$

OSS se $\bar{x}, f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon$ t.c. $|x-\bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$
cioè $x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \Rightarrow f(x) \in [f(\bar{x})-\varepsilon, f(\bar{x})+\varepsilon]$ cioè $f([\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]) \subset [f(\bar{x})-\varepsilon, f(\bar{x})+\varepsilon]$

DEF. Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice **continua**
se è continua in ogni punto di X

DEF. Sia $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice **punto di accumulazione di X**
se $\forall I$ intorno di $\bar{x}$ si ha che $(X \cap I) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

OSS se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, questo equivale a $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $|x - \bar{x}| \leq \varepsilon$

> **Proposizione** Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, sono fatti equivalenti:
> (i) $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X
> (ii) $\exists \; (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$

- Se $X = (a,b)$ i punti di accumulazione sono $[a,b]$
- Se $X = \mathbb{N}$ l'unico punto di accumulazione è $+\infty$
- Se $X = \mathbb{Q}$ i punti di accumulazione sono $\overline{\mathbb{R}}$

DEF. Dato X, $\overline{X} = X \cup \{$punti di accumulazione di $X\}$ si chiama **chiusura di X**

DEF. Dati $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $L \in \overline{\mathbb{R}}$,
dico che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ $\quad \left(f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L \right)$
se $\forall I$ intorno di L $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$

<u>Domanda 1</u>: Perché nella def. di limite ho chiesto che $\bar{x}$ sia un p di acc. di X?
Viene meno l'unicità del limite

<u>OSS</u> in generale $\overline{X} \supset X$ e l'inclusione può essere stretta

<u>Domanda 2</u>: $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

DEF. Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ si dice **punto isolato di X**
se $\exists I$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $I \cap X = \{\bar{x}\}$

<u>OSS</u> Dato $\bar{x} \in X$, o $\bar{x}$ è punto di accumulazione di X
oppure è un punto isolato

Limiti di funzioni e limiti di successioni

Proposizione Dati $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora sono fatti equivalenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$

(ii) per ogni $(x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{x}$ allora $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) Hp $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$ Ts data $x_n \to \bar{x}$, $f(x_n) \to L$

Per ipotesi, $\forall I$ intorno di L $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $x \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x) \in I$

$\exists \bar{n}$ t.c. $n \geq \bar{n} \Rightarrow x_n \in J$ e per ipotesi $x_n \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow f(x_n) \in I$

Riassumendo: $\forall I$ intorno di L $\exists \bar{n}$ t.c. $n \geq \bar{n} \Rightarrow f(x_n) \in I$

$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow L$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per assurdo suppongo che $f(x) \not\to L$ e costruisco $(x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \to \bar{x}$ e $f(x_n) \not\to L$

$\exists I$ intorno di L $\forall J$ intorno di $\bar{x}$ $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \not\subset I$

Suppongo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Considero J della forma $[\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}]$

Ottengo che $\forall n$ $f([\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}] \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \not\subset I$

$\Rightarrow \exists x_n \in [\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}] \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $f(x_n) \notin I$

$\bar{x} - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \bar{x} + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{x}$ ma $f(x_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ ↯

Analogamente se $\bar{x} = \pm\infty$, considero $J = [n, +\infty]$ oppure $J = [-\infty, n]$ □

<u>Domanda</u>: Se $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$ e $x_n \to \bar{x}$, $x_n \in X$, vale che $f(x_n) \to L$?

<u>esercizio</u> Data $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X t.c. $\forall (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ vale che $f(x_n)$ converge per $x_n \to \bar{x}$, allora il limite di $f(x_n)$ è sempre lo stesso

<u>esercizio</u> Data $(x_n)_{n=0,1,\dots} \subset \overline{\mathbb{R}}$ definisco $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(n) := x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Allora $x_n \to L \iff f(x) \to L$

Proposizione Sia $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, sia $\bar{x} \in X$ punto di accumulazione di X. Allora sono fatti equivalenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} f(\bar{x})$

(ii) f è continua in $\bar{x}$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(X \cap J \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$

ma $\bar{x} \in X$ e $f(\bar{x}) \in I$ per def. di intorno $\Rightarrow f(X \cap J) \subset I$ $\Rightarrow f$ è continua in $\bar{x}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(J \cap X) \subset I$

allora in particolare $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subset I \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} f(\bar{x})$ □

<u>Oss</u> Se $\bar{x}$ è un punto isolato di X allora f è continua in $\bar{x}$

<u>esercizio</u> Sia $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$

Definisco $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X, x \neq \bar{x} \\ L & \text{se } x = \bar{x} \end{cases}$

Allora sono fatti equivalenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$

(ii) $\tilde{f}$ è continua in $\bar{x}$

Proprietà di base sulle funzioni continue e sui limiti

Proposizione 0 Tutte le funzioni elementari (a^x, x^a, $\log x$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, ...) sono continue in tutti i punti dell'insieme di definizione

Proposizione 1 Date $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow Y \subset \overline{\mathbb{R}}$, $g: Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f continua in $\bar{x}$, g continua in $\bar{y} := f(\bar{x})$.
Allora $g \circ f$ è continua in $\bar{x}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall I$ intorno di $\bar{z} := g(\bar{y}) = g(f(\bar{x}))$ $\exists J$ intorno di $\bar{y}$ t.c. $g(J) \subset I$

$\exists K$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(K) \subset J$

Ma allora $g(f(K)) \subset g(J) \subset I$

$\Rightarrow g \circ f$ è continua in $\bar{x}$ □

Proposizione 1' Sia $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow Y \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X t.c. $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} \bar{y}$,
Suppongo $\bar{y}$ punto di accumulazione di Y. Se $\bar{y} \in Y$, chiedo che g sia continua in $\bar{y}$.
Sia $g: Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $g(y) \xrightarrow[y \to \bar{y}]{} \bar{z}$.
Allora $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} \bar{z}$

DIMOSTRAZIONE

Ci si riconduce alla prop. 1 usando l'esercizio 3 □

Proposizione 2 Date $f_1, f_2 : X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $\bar{x}$, allora:

(i) $f_1 + f_2$ è continua in $\bar{x}$

(ii) $f_1 f_2$ è continua in $\bar{x}$

Proposizione 2' Date $f_1, f_2 : X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow X$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X
e $f_1(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1$, $f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Allora

(i) $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1 + L_2$

(ii) $f_1(x) \cdot f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1 \cdot L_2$

DIMOSTRAZIONE

(i) "f_1, f_2 continue in $\bar{x}$ $\Longrightarrow f := f_1 + f_2$ continua in $\bar{x}$"

f_1, f_2 continue in $\bar{x}$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ t.c. $|x - \bar{x}| \le \delta_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |f_1(x) - f_1(\bar{x})| \le \varepsilon \\ |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \le \varepsilon \end{cases}$ (prendo il più piccolo tra δ_1 e δ_2)

cioè $\begin{cases} f_1(\bar{x}) - \varepsilon \le f_1(x) \le f_1(\bar{x}) + \varepsilon \\ f_2(\bar{x}) - \varepsilon \le f_2(x) \le f_2(\bar{x}) + \varepsilon \end{cases}$ $\Longrightarrow f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) - 2\varepsilon \le f_1(x) + f_2(x) \le f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) + 2\varepsilon$

$\Longleftrightarrow f(\bar{x}) - 2\varepsilon \le f(x) \le f(\bar{x}) + 2\varepsilon$

$\Longrightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \le 2\varepsilon \Longrightarrow f(x)$ è continua in $\bar{x}$

(ii) Date $f_1, f_2 \cdot X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $\bar{x}$ allora $f = f_1 \cdot f_2$ è continua in $\bar{x}$

f_1, f_2 continue in $\bar{x} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $x \in J \Rightarrow \begin{cases} |f_1(x) - f_1(\bar{x})| \le \varepsilon \\ |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \le \varepsilon \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |y_1 - \bar{y}_1| \le \varepsilon \\ |y_2 - \bar{y}_2| \le \varepsilon \end{cases}$

Scrivo quindi $y_1 = \bar{y}_1 + e_1$ con $|e_1| \le \varepsilon$, $y_2 = \bar{y}_2 + e_2$ con $|e_2| \le \varepsilon$

Quindi $y_1 \cdot y_2 = (\bar{y}_1 + e_1)(\bar{y}_2 + e_2) = \bar{y}_1 \bar{y}_2 + \overbrace{e_1 \bar{y}_2 + e_2 \bar{y}_2 + e_1 e_2}^{e} = \bar{y}_1 \bar{y}_2 + e$

(Uso: $|a + b| \le |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$: disuguaglianza triangolare
Segue che $|a_1 + \dots + a_k| \le |a_1| + \dots + |a_k|$ $\forall k = 2, 3, \dots$, $\forall a_i \in \mathbb{R}^n$)

$|e| \le |e_1 \bar{y}_2| + |e_2 \bar{y}_1| + |e_1 e_2| = |e_1||\bar{y}_2| + |e_2||\bar{y}_1| + |e_1||e_2| \le |\bar{y}_2| \cdot \varepsilon + |\bar{y}_1| \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$

$\Rightarrow |y_1 y_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2| \le (|\bar{y}_1| + |\bar{y}_2| + \varepsilon)\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \le (|\bar{y}_1| + |\bar{y}_2| + \varepsilon)\varepsilon$ quindi f è continua in $\bar{x}$ □

Versione alternativa:

(i) Dato I intorno di $\bar{y} := f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ — Dove $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$, $A_1 + A_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$

esistono I_1 e I_2 intorni di $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$ t.c. $I_1 + I_2 \subset I$

Usando la continuità di f_1 e f_2 trovo J intorno di $\bar{x}$ t.c. $f_1(J) \subset I_1$ $f_2(J) \subset I_2$

$\Rightarrow f(J) \subset I_1 + I_2 \subset I$

(ii) $y_1 = \bar{y}_1 \pm \varepsilon_1$, $y_2 = \bar{y}_2 \pm \varepsilon_2$ $\Rightarrow y_1 + y_2 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

In particolare $(\bar{y}_1 \pm \frac{\varepsilon}{2}) + (\bar{y}_2 \pm \frac{\varepsilon}{2})$

OSS Quello che ho veramente dimostrato è che la moltiplicazione vista come funzione da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è continua

OSS Propagazione dell'errore nella moltiplicazione:

$y_1 = \bar{y}_1 \pm \varepsilon_1$ e $y_2 = \bar{y}_2 \pm \varepsilon_2$

allora $y_1 y_2 = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \pm \underbrace{(|\bar{y}_1|\varepsilon_2 + |\bar{y}_2|\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}_{\varepsilon}$

continuità destra e sinistra

DEF. Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, gli intorni destri sono gli intervalli della forma $[\bar{x}, \bar{x}+\varepsilon]$

Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, gli intorni sinistri sono gli intervalli della forma $[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}]$

DEF. Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di X da destra se $\forall I$ intorno destro di $\bar{x}$ $(I \cap X) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di X da sinistra se $\forall I$ intorno sinistro di $\bar{x}$ $(I \cap X) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

DEF. Data $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$, f si dice continua a destra (sinistra) in $\bar{x}$ se $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno destro (sinistro) di $\bar{x}$ t.c. $f(J \cap X) \subset I$

proposizione Data $f: X \subset \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ monotona, $\bar{x}$ punto di accumulazione destro (sinistro) di X, allora esiste $\lim_{x \to \bar{x}^{\pm}} f(x)$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo f crescente, $\bar{x}$ p.to di accumulazione sinistro di X

Sia $L := \sup\{f(x) \mid x \in X, x < \bar{x}\}$. Dimostro che $\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = L$

Vale $f(x) \leq L$ $\forall x < \bar{x}$

Se $L = -\infty$, allora $f(x) = -\infty$ $\forall x < \bar{x}, x \in X$

Se $L \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon < \bar{x}$ t.c. $f(x) \geq L - \varepsilon$ per $x > x_\varepsilon$. Sia quindi $J = [x_\varepsilon, \bar{x})$ intorno sx di $\bar{x}$: $L - \varepsilon \leq f(x) \leq L$ $\forall x \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\}$

Analogo se $L = +\infty$ ($f(x) \geq M$ per $x > x_M, \dots$) ◻

ACHTUNG: limite dx e limite sx potrebbero non essere uguali

esempio Esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua in ogni punto: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Dato $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(\bar{x}) = 0$, ma esiste $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$ (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$f(x_n) = 1 \not\longrightarrow 0 = f(\bar{x})$

Dato $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, $f(\bar{x}) = 1$ esiste $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$ (densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$f(x_n) = 0 \not\longrightarrow 1 = f(\bar{x})$ $\Longrightarrow f$ non è continua

esercizio Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona, l'insieme dei punti di discontinuità è numerabile

Lemma Se $x_n \longrightarrow L$ e $L>0$, allora $\exists \bar{n}$ t.c. $x_n>0 \ \forall n \geq \bar{n}$

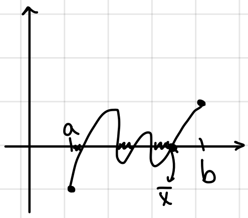
DIMOSTRAZIONE

Siccome $0<L$, $\exists I$ intorno di L t.c. $0 \notin I \Rightarrow 0<I$
$\Rightarrow \exists n_I$ t.c. $n \geq n_I \Rightarrow x_n \in I \Rightarrow x_n > 0$ $\square$

corollario Se $x_n \geq 0$ e $x_n \longrightarrow L$, allora $L \geq 0$

Teorema degli zeri Dato $I=[a,b]$ intervallo e una funzione continua $f: I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $f(a), f(b)$ sono discordi, allora $\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x})=0$

DIMOSTRAZIONE (1)



Suppongo $f(a)<0<f(b)$
Sia $E=\{x \in I \mid f(x)<0\}$
Prendo $\bar{x} := \sup E$.
Faccio vedere che $f(\bar{x})=0$

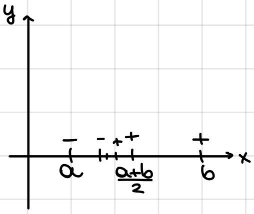
__Passo 1__ $f(\bar{x}) \leq 0$
$\exists (x_n) \subset E$ t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$
allora $f(x_n)<0 \Rightarrow f(x_n) \leq 0$
$\Rightarrow f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq 0$
$\uparrow$ f è continua

__Passo 2__ $f(\bar{x}) \geq 0$
Prendo (x_n) t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$, $x_n > \bar{x} \Rightarrow x_n \notin E$
$\Rightarrow f(x_n) \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \geq 0$
$\Rightarrow f(\bar{x})=0$ $\square$

DIMOSTRAZIONE (2)

Suppongo $f(a)<0<f(b)$, a,b finiti (se non lo sono, si fa un cambio di variabile)

__Passo 1__ Divido I in due metà ($I'=[a, \frac{a+b}{2}]$, $I''=[\frac{a+b}{2}, b]$)
i valori di f agli estremi di I' o I'' sono discordi
Chiamo $I_1=[a_1,b_1]$ quello tra I' e I'' per cui questo succede



__Passo 2__ Prendo $I_2=[a_2,b_2]$ metà di I_1 per cui i valori di f agli estremi sono discordi
... (costruzione per ricorsione)

Ho costruito una successione di intervalli $I_n=[a_n,b_n]$ t.c.
$I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ e $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ $\forall n$
e $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$\Rightarrow a_n$ crescente e b_n decrescente
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n =: \bar{x}$
$f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0$ per la continuità di f e $f(a_n) \leq 0$
$f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0$
$\Rightarrow f(\bar{x})=0$ $\square$

__OSS__ L'algoritmo per costruire a_n e b_n dà un modo per calcolare $\bar{x}$ in modo approssimato
Infatti $|a_n - \bar{x}| \leq \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$

__ACHTUNG__ Così si trova solo uno zero

Lemma Dato $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ t.c. dati $y_1 < y_2 \in E$ allora $[y_1, y_2] \subset E$
allora E è un intervallo
(Se $E \subset \mathbb{R}$, E è convesso)

DIMOSTRAZIONE

① $E \subset [\inf E, \sup E]$ ovvio

② $(\inf E, \sup E) \subset E$

infatti, dato y t.c. $\inf E < y < \sup E$

$\Rightarrow$ y non è minorante o maggiorante di E $\Rightarrow \exists\, y_1, y_2 \in E$ t.c. $y_1 < y < y_2$

$\Rightarrow y \in [y_1, y_2] \overset{\text{hp}}{\subset} E \Rightarrow E$ è un intervallo $\square$

corollario (Teorema dei valori intermedi) Dato I intervallo qualunque, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua
allora dati $y_1, y_2 \in f(I)$, vale che $[y_1, y_2] \subset f(I)$
Cioè $f(I)$ è un intervallo

DIMOSTRAZIONE

<u>Passo 1</u>: Dati $y_1 < y_2$ in $f(I)$ allora $[y_1, y_2] \subset f(I)$

$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Dato $y_1 < y < y_2$, applico il teorema degli zeri all'intervallo $[x_1, x_2]$ e alla funzione $f(x) - y =: \tilde{f}(x)$

Allora $\tilde{f}$ è continua,

$\tilde{f}(x_1) = f(x_1) - y = y_1 - y < 0$, $\tilde{f}(x_2) = f(x_2) - y = y_2 - y > 0$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [x_1, x_2]$ t.c. $\tilde{f}(\bar{x}) = 0$

cioè $f(\bar{x}) - y = 0$, cioè $f(\bar{x}) = y \Rightarrow y \in f(I)$

<u>Passo 2</u>: $f(I)$ è un intervallo per il lemma $\square$

Teorema di Weierstraß Sia $I = [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ intervallo chiuso e $f: I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua
allora esistono x_M e x_m punti di massimo e minimo assoluto

In particolare, esistono val. max e val min

<u>NOTA</u>: in realtà non serve I intervallo, ma I chiuso (contiene i suoi punti di accumulazione)

DIMOSTRAZIONE

Ci limitiamo a dimostrare l'esistenza del punto di minimo
(per il massimo si applica il teorema a $-f$)

Sia $m := \inf\{f(I)\}$. Esiste $(y_n) \subset f(I)$ t.c. $y_n \longrightarrow m$, con $y_n = f(x_n)$

(Se $x_n \longrightarrow \bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}) = \lim f(x_n) = \lim y_n = m$)

Per Bolzano-Weierstrass, esiste n_k t.c. $x_{n_k} \longrightarrow \bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$

Siccome $(x_n) \subset I$ intervallo chiuso, allora $\bar{x} \in I$ (dim. per es.)

$$f(\bar{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuità di } f}}{=} \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = \lim_{n \to +\infty} y_n = m$$

Quindi $m \in f(I)$ e $m = \inf\{f(I)\}$, allora $m = f(\bar{x}) = \min f(I)$ e $\bar{x}$ punto di min $\square$

<u>esempio</u> in cui x_n non ha limite

Giustificazione: algoritmo di ricerca max e min

Sia I intervallo con estremi $a<b$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Sia $E = \{a,b\} \cup \{x \in (a,b) \mid f'(x)=0\} \cup \{x \in (a,b) \mid f'(x) \text{ non esiste}\}$

Si suppone E finito e si confrontano i valori di f su E

Se f non è definita in a o b, si sostituisce il valore di f con $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$

Sia m il valore più basso: se assunto in $\bar{x} \in E \cap I$ m è il val. minimo

altrimenti m è l'inf dei valori (il minimo non esiste)

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo $\bar{I} = I \cup \{a,b\}$

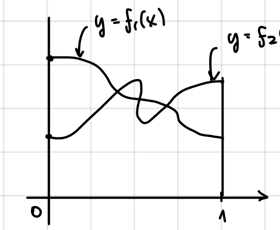
Prendiamo $\tilde{f} : \bar{I} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ data da $\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \\ \lim_{x\to a^+} f(x) & \text{se } x=a, a \notin I \\ \lim_{x\to b^-} f(x) & \text{se } x=b, b \notin I \end{cases}$

$\tilde{f} : \bar{I} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ è continua

Per Weierstrass, esiste $\bar{x} \in \bar{I}$ punto di minimo di $\tilde{f}$

Per Fermat, $\bar{x} \in E$ $\square$

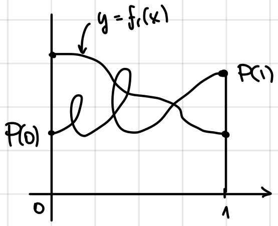
esercizio



$f_1(0) > f_2(0)$

$f_1(1) < f_2(0)$

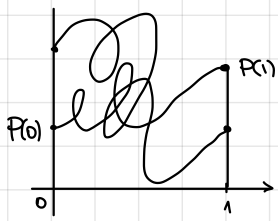
Allora i due grafici si intersecano



$P(t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$

$P(0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$

$P(1) \in \{1\} \times \mathbb{R}$



FUNZIONI DERIVABILI

DEF. Sia $f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ punto di accumulazione di X.
Se esiste $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$
la chiamo derivata di f in $\bar{x}$ e la indico con $f'(\bar{x})$, $Df(\bar{x})$

<u>OSS</u>
- f' è definita sull'insieme dei punti $\bar{x}$ dove $f'(\bar{x})$ esiste
  <u>ACHTUNG</u>: questo insieme può essere vuoto
- f si dice derivabile in $\bar{x}$ se $f(\bar{x})$ esiste ed è finito
- $f'' := (f')'$ (definita dove esiste)
  $D^n f = \underbrace{D(D(\dots(Df)\dots))}_{n \text{ volte}}$ per $n = 1,2,3,\dots$ e $D^0 f = id$
- Derivata destra e sinistra di f in $\bar{x}$
  $D_+ f(\bar{x})$ e $D_- f(\bar{x})$
- Sia X insieme senza punti isolati
  f è derivabile se è derivabile in ogni $\bar{x} \in X$
  Dico che f è $\mathcal{C}^1$ se f è derivabile e f' è continua
  Dico che f è $\mathcal{C}^n$ se f è derivabile n volte e le derivate sono tutte continue
  $\mathcal{C}^\infty$

proposizione Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ punto di acc. di X. Allora:
(i) f derivabile in $\bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot h + o(h)$ $\forall h$ t.c. $\bar{x}+h \in X$
(ii) se esiste a t.c. $f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + ah + o(h)$ $\forall h$ t.c. $\bar{x}+h \in X$, allora
f è derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = a$

DIMOSTRAZIONE
(i) Devo fare vedere che $f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h = o(h)$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) \overset{hp}{=} f'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = 0$$
(ii) $$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{f(\bar{x}) + ah + o(h) - f(\bar{x})}{h} = a + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} a$$
cioè $f'(\bar{x})$ esiste ed è a $\square$

corollario Se f è derivabile in $\bar{x}$, allora è continua in $\bar{x}$

DIMOSTRAZIONE
$$\lim_{h \to 0} f(\bar{x}+h) = \lim_{h \to 0} f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h) = f(\bar{x}) \Rightarrow f \text{ continua in } \bar{x} \ \square$$

<u>ACHTUNG</u>: esiste f con $f'(\bar{x}) = +\infty$ non continua in $\bar{x}$

<u>esempio</u> $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

proposizione Siano $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $\bar{x}$. Allora: f_1+f_2 e $f_1 \cdot f_2$ sono derivabili in $\bar{x}$ e
$(f_1+f_2)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x})+f_2'(\bar{x})$ e $(f_1 f_2)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) f_2(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) f_2'(\bar{x})$

DIMOSTRAZIONE

$f_1(\bar{x}+h) = f_1(\bar{x}) + f_1'(\bar{x})h + o(h)$ e $f_2(\bar{x}+h) = f_2(\bar{x}) + f_2'(\bar{x})h + o(h)$

$f_1(\bar{x}+h) + f_2(\bar{x}+h) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) + (f_1'(\bar{x}) + f_2'(\bar{x}))h + o(h)$

$f_1(\bar{x}+h) f_2(\bar{x}+h) = f_1(\bar{x}) f_2(\bar{x}) + (f_1'(\bar{x}) f_2(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) f_2'(\bar{x}))h + o(h)$ $\square$

proposizione Sia $f : X \longrightarrow Y$ derivabile in $\bar{x}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $\bar{y} := f(\bar{x})$
Allora $g \circ f$ è derivabile in $\bar{x}$ e $(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(\bar{y}) f'(\bar{x})$

DIMOSTRAZIONE

$$g(f(\bar{x}+h)) = g(\overbrace{f(\bar{x})}^{\bar{y}} + \overbrace{f'(\bar{x})h + o(h)}^{k=k(h)}) = g(\bar{y}+k) = g(\bar{y}) + g'(\bar{y})k + o(k) =$$
$$= g(f(\bar{x})) + g'(f(\bar{x}))\,(f'(\bar{x})h + o(h)) + o(k(h)) =$$
$$= g(f(\bar{x})) + g'(f(\bar{x})) f'(\bar{x})h + o(h)$$
perché $k = O(h)$, $o(k(h)) = o(O(h)) = o(h)$ $\square$

proposizione Sia $f : X \longrightarrow Y$ con inversa $g : Y \longrightarrow X$, f derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$. Sia g continua in $\bar{y} := f(\bar{x})$. Allora $\bar{y}$ è punto di acc. di Y, g è derivabile in $\bar{y}$ e $g'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$

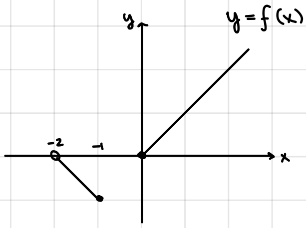
DIMOSTRAZIONE

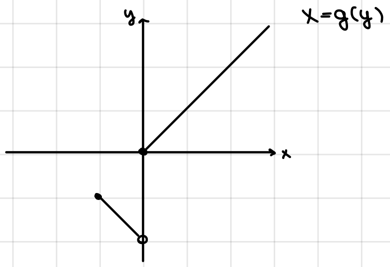
(i) $\bar{x}$ punto di acc. di $X \Rightarrow \exists (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $x_n \longrightarrow \bar{x}$
allora $y_n := f(x_n) \in Y$, $y_n = f(x_n) \longrightarrow f(\bar{x}) = \bar{y}$
Inoltre $y_n = f(x_n) \neq f(\bar{x}) = \bar{y}$ perché $x_n \neq \bar{x}$ e f è iniettiva
$\Rightarrow (y_n) \subset Y \setminus \{\bar{y}\}$

(ii) $f(g(\bar{y}+k)) = \bar{y}+k = f(\overbrace{g(\bar{y})}^{\bar{x}} + \overbrace{(g(\bar{y}+k) - g(\bar{y}))}^{h=h(k)}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot h + o(h)$
$\Rightarrow k = f'(\bar{x})h(k) + o(h(k)) \sim f'(\bar{x}) \cdot h(k) \Rightarrow h(k) \sim \frac{1}{f'(\bar{x})} k$
$h(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

$$\frac{g(\bar{y}+k) - g(\bar{y})}{k} = \frac{h(k)}{k} \sim \frac{\frac{1}{f'(\bar{x})}k}{k} = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$ $\square$

esempio L'ipotesi g continua in $\bar{y}$ è necessaria





$\bar{y} = f(\bar{x}) = f(0) = 0$

g non è continua in 0
e non è derivabile
$D_+ g(0) = 1$ $D_- g(0) = +\infty$

Le funzioni elementari sono derivabili e quindi continue sul dominio con queste eccezioni:

- $|x|$ non è derivabile in 0 ($f'(0)$ non esiste) ma è continua
- x^a con $0<a<1$ non è derivabile in 0 ($f'(0)=+\infty$)
- $\arcsin x$ non è derivabile in ± 1 ($f'(\pm 1)=+\infty$)

Proposizione (Fermat) Sia I intervallo, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x}$ interno a I, punto di max/min locale e esiste $f'(\bar{x})$. Allora $f'(\bar{x})=0$

DIMOSTRAZIONE

Sia J intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x})=\min\limits_{x\in J} f(x)$ (analogo per max)

Sia $h>0$ t.c. $\bar{x}+h \in J$. Allora:

$$f(\bar{x}+h) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} \geq 0 \xrightarrow[h\to 0]{} f'(\bar{x}) \geq 0$$

Sia $h<0$ t.c. $\bar{x}+h \in J$. Allora:

$$f(\bar{x}+h) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} \leq 0 \xrightarrow[h\to 0]{} f'(\bar{x}) \leq 0$$

$\Rightarrow f'(\bar{x})=0$ □

esercizio Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ punto di min locale (cioè $\exists I$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f|_{I\cap X}$ ha minimo assoluto in $\bar{x}$)

esiste $D_+f(\bar{x})$ (opp. $D_-f(\bar{x})$) (in part, $\bar{x}$ punto di acc. dx di X)

Allora $f'(\bar{x}) \geq 0$ (opp $f'(\bar{x}) \leq 0$)

Teorema di Rolle Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $f(a)=f(b)$

(ii) f continua in $[a,b]$

(iii) f derivabile in (a,b)

allora $\exists\, \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f'(\bar{x})=0$

NOTA in (iii) quello che serve davvero è che esista la derivata

DIMOSTRAZIONE

Per Weierstraß, $\exists$ max e min di f

x_{min} è il punto di min, x_{max} è il punto di max

$x_{min}, x_{max} \in [a,b]$

caso 1 $x_{min}, x_{max} \in \{a,b\} \Rightarrow f(a)=f(x_{min})=f(x_{max})=f(b)$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b)$ $f(x_{min})=f(x_{max})=f(x)$ f è costante $\Rightarrow \forall x \in (a,b)$ $f'(x)=0$

Quindi $\bar{x}$ è un qualsiasi punto in (a,b)

caso 2 Almeno uno tra x_{min} e x_{max} non appartiene a $\{a,b\}$

"wlog" $x_{min} \notin \{a,b\} \Rightarrow f'(x_{min})=0$

Quindi $\bar{x}$ cercato è x_{min} □

Teorema di Cauchy

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che
(i) f,g continue in $[a,b]$
(ii) f,g derivabili in (a,b)
(iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
allora $g(a) \neq g(b)$ e $\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c.
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} \quad (*)$$

<u>NOTA</u>. $(*)$ diventa $(f(b)-f(a))g'(\bar{x}) = (g(b)-g(a))f'(\bar{x}) \quad (\#)$
valida anche senza hp. (iii)

<u>NOTA</u>: posso scrivere $(\#)$ come $f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\bar{x}) = 0$

DIMOSTRAZIONE (idea)

Sia $F(x) = f(x) + cg(x)$

Pongo $F(a) = F(b) \longrightarrow f(a) + cg(a) = f(b) + cg(b) \longrightarrow c(g(b)-g(a)) = f(a) - f(b)$
$\longrightarrow c = \frac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)} = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

DIMOSTRAZIONE

Sia $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

Osservo che: $F(a) = F(b)$; F è continua in $[a,b]$; F è derivabile in (a,b)

Osservo che F ha senso perché per Rolle $g(a) \neq g(b)$

Allora per Rolle $\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $F'(\bar{x}) = 0$

$F'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\square$

<u>esempio</u> $[a,b] = [1,-1]$
$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
$g'(x) = 3x^2 = 0$ se $x = 0$
Resta vero che $\exists \bar{x} \in (-1,1)$ t.c. $(f(b)-f(a))g'(\bar{x}) = (g(b)-g(a))f'(\bar{x})$
ma non vale più $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che
(i) f continua su $[a,b]$
(ii) f derivabile su (a,b)
allora $\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\bar{x})$

DIMOSTRAZIONE

Applico Cauchy con $g(x) = x$ $\square$

Applicazioni

Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora:

(i) f crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$

(ii) f strett. cresc $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ e $\{x : f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$: Dato $x \in I$, $h > 0$ t.c. $x+h \in I$, f crescente $\Rightarrow f(x+h) \geq f(x)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \xRightarrow[h \to 0^+]{} f'(x) \geq 0$

$\Leftarrow$: Siano $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, considero $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Per Lagrange $\exists \xi \in (x_0, x_1)$ t.c. $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$

(ii) $\Rightarrow$ f strett. crescente, in particolare f crescente $\overset{(i)}{\Longrightarrow} f' \geq 0$

Se $\{x : f'(x) = 0\}$ contenesse un intervallo I, f sarebbe costante su I ↯

$\Leftarrow$ $f' \geq 0 \Rightarrow f$ crescente

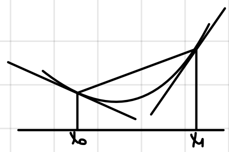
Se f non fosse strett. crescente, sarebbe costante su un intervallo I

$\Rightarrow I \subset \{x : f'(x) = 0\}$ ↯

□

Teorema Data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, allora

f convessa $\Longleftrightarrow f'$ è crescente



DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: Prendo $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$

Prendo $h > 0$ t.c. $x_0 < x_0 + h \leq x_1$

Allora $x_0 + h = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ con $\lambda = \dfrac{h}{x_1 - x_0}$

Siccome f è convessa: $f(x_0+h) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1) = \left(1 - \dfrac{h}{x_1 - x_0}\right) f(x_0) + \dfrac{h}{x_1 - x_0} f(x_1) =$

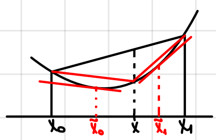
$= f(x_0) + \dfrac{h}{x_1 - x_0}\left(f(x_1) - f(x_0)\right)$

$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \leq \dfrac{h}{x_1 - x_0}\left(f(x_1) - f(x_0)\right) \Longrightarrow \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$\xRightarrow[h \to 0]{} f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Analogamente $f'(x_1) \geq \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$\Rightarrow f'(x_0) \leq f'(x_1)$



$\Leftarrow$: Prendo $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$

Prendo λ t.c. $0 < \lambda < 1$

Prendo $x := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$, so che $x_0 < x < x_1$

Per Lagrange, $\exists\, \xi_0$ t.c. $x_0 < \xi_0 < x$ t.c. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_0)$

$\exists\, \xi_1$ t.c. $x < \xi_1 < x_1$ t.c. $\dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi_1)$

e $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_0)$ perché $\xi_1 > \xi_0$ e f crescente

$\Rightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \geq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow (x - x_0) f(x_1) - (x - x_0) f(x) \geq (x_1 - x) f(x) - (x_1 - x) f(x_0)$

$\Rightarrow (x - x_0) f(x_1) + (x_1 - x) f(x_0) \geq (x_1 - x_0) f(x)$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{=\lambda} f(x_1) + \underbrace{\dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}}_{=1-\lambda} f(x_0) \geq f(x)$

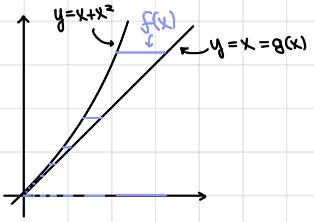
□

Teorema di De L'Hôpital

Dato I intervallo in $\overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in I$, pongo $I' := I \setminus \{x_0\}$
Date $f, g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili con $g' \neq 0$ t.c.
(i) esiste $L := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
(ii) vale (a) $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ oppure (b) $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$
Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} L$

OSS È essenziale che I intervallo

esempio $g(x) = x$, $x_0 = 0$
$x \leq f(x) \leq x + x^2$
$\Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x^2$
$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$



ma $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$

OSS Può succedere $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste

esempio $x \to +\infty$ $g(x) = x$, $f(x) = x + \sin(x^2)$
$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

ma $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + 2x\cos(x^2)$ non ha limite per $x \to +\infty$

DIMOSTRAZIONE

(a) Pongo $f(x_0) := 0$, $g(x_0) := 0$
allora f e g sono continue in x_0 e quindi su I
Mi limito al caso I intorno dx di x_0 (gli altri sono analoghi), x_0 finito
Prendo $x \in I \setminus \{x_0\}$ cioè $x > x_0$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \underset{\uparrow}{=} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}$$
Cauchy: $\exists\, \tilde{x} = \tilde{x}(x) \in (x_0, x)$ t.c.

Se $x \to x_0 \Longrightarrow \tilde{x}(x) \longrightarrow x_0$

cambio di variabile
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\tilde{x}(x))}{g'(\tilde{x}(x))} = \lim_{\tilde{x} \to x_0} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = L$$

OSS è l'unico caso in cui la funzione non è necessariamente derivabile agli estremi (come nelle ipotesi di Cauchy)

(b) Prendo $x_1 > x_0$, prendo $x_0 < x < x_1$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right] \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}$$
(con $\frac{f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ e $\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} \quad \text{con } x \leq \tilde{x} \leq x_1 \text{ e } \tilde{x} = \tilde{x}(x)$$

$$M(x_1) := \sup_{\bar{x} \leq \tilde{x} \leq x_1} \left\{ \frac{f'(x)}{g'(x)} \right\} \qquad m(x_1) := \inf_{\bar{x} \leq \tilde{x} \leq x_1} \left\{ \frac{f'(x)}{g'(x)} \right\}$$

$$m(x_1) \xleftarrow[x \to \bar{x}]{} \quad \dots \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \left[M(x_1) + \frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right] \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} M(x_1)$$

$$m(x_1) \leq \liminf \leq \limsup_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} \leq M(x_1)$$

Siccome $\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow L$ $\exists \delta$ t.c.
se $x_1 \leq \bar{x} + \delta$ allora $L - \varepsilon \leq m(x) \leq M(x) \leq L + \varepsilon$

esempio $f(x)=\sqrt{1-x^4} \qquad -1\leq x\leq x$

$f'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ vale per $-1<x<1$

$f'(1)=+\infty$ è legittimo?

proposizione Sia I intervallo, $x_0\in I$, $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile in $I\setminus\{x_0\}$ ed esiste $L:=\lim_{x\to x_0} f'(x)$, $L\in\overline{\mathbb{R}}$

Allora $f'(x_0)$ esiste e vale $f'(x_0)=L$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=L \qquad \square$$

esempio $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

per $x\neq 0$, f è continua, derivabile e $f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>OSS</u> $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\overset{=0}{f(0)}}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)=0$$

Teorema di Taylor

Dato $d=0,1,\dots$, I intervallo, $\bar{x}\in I$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sia $P_d(h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x})h^2 + \dots + \frac{1}{d!}D^d f(\bar{x})\, h^d$ polinomio di Taylor di f in $\bar{x}$ di ordine d e $R_d(h)$ il resto, cioè $f(\bar{x}+h) = P_d(h) + R_d(h)$.
Allora:

(i) se f è derivabile $d-1$ volte su I, d volte in $\bar{x}$
$$R_d(h) = o(h^d) \text{ per } h \longrightarrow 0$$
(ii) se f è derivabile d volte su I e $d+1$ volte in $\bar{x}$,
$$R_d(h) = O(h^{d+1}) \text{ per } h\to 0 \quad e \quad \frac{R_d(h)}{h^{d+1}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{D^{d+1}f(\bar{x})}{(d+1)!}$$
} formule del resto di Peano

(iii) se f è derivabile $d+1$ volte su I, allora $\forall h$ t.c. $\bar{x}+h\in I$
$$\exists \tilde{x}\in[\bar{x},\bar{x}+h] \text{ t.c. } R_d(h) = \frac{D^{d+1}f(\tilde{x})}{(d+1)!}h^{d+1}$$
} formula del resto di Lagrange

(iv) se f è C^{d+1}, $R_d(h) = \frac{1}{d!}\int_0^h (h-t)^d D^{d+1} f(\bar{x}+t)\,dt$
} formula del resto integrale

DIMOSTRAZIONE

Nella dimostrazione assumo $\bar{x}=0$ e f C^{d+1} (ipotesi di (iv))
Dimostro (iv) e le implicazioni (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i)

(iv) Devo dimostrare che $f(h) = P_d(h) + \frac{1}{d!}\int_0^h (h-t)^d D^{d+1} f(t)\,dt \quad (*_d)$

$\underline{d=0}$ $(*_0)$ $f(h) = f(0) + \int_0^h f'(t)\,dt$ (teorema fondamentale del calcolo integrale)

$\underline{d=1}$ integro $(*_0)$ per parti
$$f(h) = f(0) + \int_0^h f'(t)\cdot 1\,dt = f(0) + \Big|-(h-t)f'(t)\Big|_0^h + \int_0^h (h-t)f''(t)\,dt =$$
$$= f(0) + f'(0)\cdot h + \int_0^h (h-t)f''(t)\,dt \qquad (*_1)$$

$\underline{d=2}$ integro $(*_1)$ per parti
$$f(h) = P_1(h) + \Big|-\tfrac{1}{2}(h-t)^2 f''(t)\Big|_0^h + \int_0^h \tfrac{1}{2}(h-t)^2 f'''(t)\,dt =$$
$$= P_2(h) + \tfrac{1}{2}\int_0^h (h-t)^2 f'''(t)\,dt$$

Procedo per induzione su d
Derivo $(*_d)$ da $(*_{d-1})$
$$f(h) = P_{d-1}(h) + \frac{1}{(d-1)!}\int_0^h (h-t)^{d-1} D^d f(t)\,dt = P_{d-1}(h) + \frac{1}{(d-1)!}\Big|-\frac{(h-t)^d}{d}D^d f(t)\Big|_0^h + \frac{1}{(d-1)!}\int_0^h \frac{(h-t)^d}{d}D^{d+1}f(t)\,dt =$$
$$= P_{d-1}(h) + \frac{1}{d!}D^d f(0)h^d + \frac{1}{d!}\int_0^h (h-t)^d D^{d+1} f(t)\,dt = P_d(h) + \frac{1}{d!}\int_0^h (h-t)^d D^{d+1} f(t)\,dt$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Suppongo $h>0$ (analogo per $h<0$, invertendo gli estremi)
Sia $M(h) := \max\limits_{0\le t\le h} D^{d+1} f(t)$; $m(h) := \min\limits_{0\le t\le h} D^{d+1} f(t)$
$$R_d(h) \le \frac{1}{d!}\int_0^h (h-t)^d M(h)\,dt = \frac{M(h)}{d!}\Big|-\frac{(h-t)^{d+1}}{d+1}\Big|_0^h = \frac{M(h)\,h^{d+1}}{(d+1)!}$$
Quindi $\frac{m(h)\,h^{d+1}}{(d+1)!} \le R_d(h) \le \frac{M(h)\,h^{d+1}}{(d+1)!} \Rightarrow \min\limits_{0\le t\le h} D^{d+1}f(t) = m(h) \le R_d(h)\frac{(d+1)!}{h^{d+1}} \le M(h) = \max\limits_{0\le t\le h} D^{d+1}f(t)$

Per il teorema dei valori intermedi, $\exists\, \tilde{x}\in[0,h]$ t.c. $R_d(h)\frac{(d+1)!}{h^{d+1}} = D^{d+1}f(\tilde{x})$
$$\Longrightarrow R_d(h) = \frac{D^{d+1}f(\tilde{x})}{(d+1)!}h^{d+1}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)
$$R_d(h) \underset{\exists \tilde{x}(h)\in[0,h] \text{ t.c.}}{=} \frac{D^{d+1}f(\tilde{x})}{(d+1)!}h^{d+1}$$
$$\frac{R_d(h)}{h^{d+1}} = \frac{D^{d+1}f(\tilde{x})}{(d+1)!} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{D^{d+1}f(0)}{(d+1)!} \quad \text{perché } \tilde{x}(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $R_d(h) = O(h^{d+1}) \Rightarrow \exists\,\delta>0\ \exists\, m>0 : |x-\bar{x}|<\delta, x\in I, x\ne\bar{x} \Rightarrow |R_d(h)| \le m|h^{d+1}|$
$$\Rightarrow \left|\frac{R_d(h)}{h^d}\right| \le m|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow \frac{R_d(h)}{h^d} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow R_d(h) = o(h^d)$$
$\square$

OSS (i),(ii) e (iii) possono essere dimostrati sotto ipotesi ottimali

DIMOSTRAZIONE (i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_d(h)}{h^d} \underset{\substack{\uparrow\\ R_d(0)=0}}{\overset{H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{R_d'(h)}{d\,h^{d-1}} \underset{\substack{\uparrow\\ R_d'(0)=0}}{\overset{H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{R_d''(h)}{d(d-1)\,h^{d-2}} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{D^{d-1}R_d(h)}{d!\,h} = \lim_{h\to 0}\frac{D^{d-1}R_d(h)-\overset{=0}{D^{d-1}R_d(0)}}{d!\,h} = \frac{D^d R_d(0)}{d!}=0$$

dove $D^h R_d(0)=0 \Leftarrow D^h f(0)=D^h P_d(0)\ \forall h=0,1,\dots,d$ □

DIMOSTRAZIONE (ii)

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_d(h)}{h^{d+1}} \underset{\substack{\uparrow\\ R_d(0)=0}}{\overset{H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{R_d'(h)}{(d+1)\,h^{d}} \underset{\substack{\uparrow\\ R_d'(0)=0}}{\overset{H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{R_d''(h)}{(d+1)d\cdot h^{d-1}} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{D^d R_d(h)}{(d+1)!\,h} = \lim_{h\to 0}\frac{D^d R_d(h)-D^d R_d(0)}{(d+1)!\,h} = \frac{D^{d+1}R_d(0)}{(d+1)!}=\frac{D^{d+1}f(0)}{(d+1)!}$$

□

DIMOSTRAZIONE (iii)

$$\frac{R_d(h)}{h^{d+1}} = \frac{R_d(h)-R_d(0)}{h^{d+1}-0^{d+1}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchy: } \exists h_1\in(0,h)}}{=} \frac{R_d'(h_1)}{(d+1)\,h_1^d} = \frac{R_d'(h_1)-R_d'(0)}{(d+1)h_1^d-(d+1)0^d} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchy: } \exists h_2\in(0,h_1)}}{=} \frac{R_d''(h_2)}{(d+1)d\,h_2^{d-1}} = \dots$$

□

Proposizione Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile, $\bar{x}\in I$ t.c. $f'(\bar{x})=0$ ed esiste $f''(\bar{x})$

Allora (i) $f''(\bar{x})>0 \Longrightarrow \bar{x}$ punto di min locale stretto

(esiste J intorno di $\bar{x}$ t.c. $\bar{x}$ è l'unico punto di min di f relativo a $I\cap J$)

(i') $f''(\bar{x})<0 \Longrightarrow \bar{x}$ punto di max locale stretto

(ii) $\bar{x}$ punto di min locale $\Longrightarrow f''(\bar{x})\geq 0$

(ii') $\bar{x}$ punto di max locale $\Longrightarrow f''(\bar{x})\leq 0$

DIMOSTRAZIONE

(i) $f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+\overset{=0}{f'(\bar{x})}h+\frac{1}{2}\cdot f''(\bar{x})h^2+o(h^2)$ sviluppo di Taylor all'ord. 2 con resto di Peano

$\Longrightarrow \dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h^2}=\frac{1}{2}f''(\bar{x})+o(h^0) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}f''(\bar{x})>0$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}f''(\bar{x})+o(h^0)>0$ in un intorno J di 0

$\Longrightarrow f(\bar{x}+h)>f(\bar{x})\ \forall h$ in $J\setminus\{0\}$

(i') segue da (i) applicato a $-f$

(ii) per assurdo sia $f''(\bar{x})<0$, allora per (i') $\bar{x}$ è punto di max locale stretto,

ma $\bar{x}$ è punto di min locale $\lightning$ $\Longrightarrow f''(\bar{x})\geq 0$

(ii') segue da (ii) applicata a $-f$.

□

INTEGRALE DI RIEMANN

DEF. Preso $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sia $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
Diciamo che σ è una partizione di $[a,b]$ se
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

esempio Scelgo n e definisco $x_i := a + i\,\frac{b-a}{n}$ $\quad i = 0, \dots, n$
$\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ è una partizione con $|x_{i+1} - x_i| = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$
In questo caso σ è equispaziata

DEF. Chiamiamo $\delta(\sigma)$ parametro di finezza della partizione $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$
$$\delta(\sigma) := \max_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|$$

Se σ è una partizione equispaziata di punti, allora $\delta(\sigma) = \frac{b-a}{n}$

DEF. Date σ_1, σ_2 partizioni di $[a,b]$,
σ_2 è più fine di σ_1 se $\sigma_1 \subset \sigma_2$

OSS Date σ_1, σ_2 partizioni di $[a,b]$, abbiamo che $\sigma_1 \cup \sigma_2$ è più fine di σ_1 e di σ_2.

DEF. Data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f limitata, σ partizione di $[a,b]$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$
Definisco la somma di Riemann inferiore
$$S' = S'(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x_i \le x \le x_{i-1}} f \right) (x_i - x_{i-1})$$
e la somma di Riemann superiore
$$S'' = S''(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_i \le x \le x_{i-1}} f \right) (x_i - x_{i-1})$$

Proposizione Sia $f : [a,b]$ limitata
(i) $\forall \sigma$ suddivisione di $[a,b]$ $\quad S'(f,\sigma) \le S''(f,\sigma)$
(ii) $\forall \sigma_1, \sigma_2$ suddivisioni di $[a,b]$ con σ_2 più fine di σ_1
si ha $\quad S'(f,\sigma_1) \le S'(f,\sigma_2) \le S''(f,\sigma_2) \le S''(f,\sigma_1)$
(iii) $\forall \sigma_1, \sigma_2$ suddivisioni di $[a,b]$, si ha
$$S'(f,\sigma_1) \le S''(f,\sigma_2)$$

DIMOSTRAZIONE
(i) dalla def. di inf e sup
(ii) $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$
$\sigma_2 = \sigma_1 \cup \{\xi\}$
dove $\xi \in (x_{\tau-1}, x_\tau)$

$$S'(f,\sigma_1) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x_i \le x \le x_{i-1}} f \right)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i<\tau} (\inf)(x_i - x_{i-1}) + \left(\inf_{x_\tau \le x \le x_{\tau-1}} f \right)(\xi - x_{\tau-1}) + \left(\inf_{x_\tau \le x \le x_{\tau-1}} f \right)(x_\tau - \xi) + \sum_{i>\tau} (\inf f)(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \sum_{i<\tau} (\inf f)(x_i - x_{i-1}) + \left(\inf_{x_{\tau-1} \le x \le \xi} f \right)(\xi - x_{\tau-1}) + \left(\inf_{\xi \le x \le x_\tau} f \right)(x_\tau - \xi) + \sum_{i>\tau} (\inf f)(x_i - x_{i-1}) = S'(f,\sigma_2)$$

(iii) $\sigma_1 \cup \sigma_2$ è più fine di σ_1 e di σ_2
$$S'(f,\sigma_1) \le S'(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \le S''(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \le S''(f,\sigma_2)$$
$\square$

DEF. Data $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata
Definiamo l'integrale di Riemann inferiore
$$_*\int_a^b f = \sup\{S'(f,\sigma) \mid \sigma \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$
e l'integrale di Riemann superiore
$$^*\int_a^b f = \inf\{S''(f,\sigma) \mid \sigma \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

OSS vale $_*\int_a^b f \leq {}^*\int_a^b f$

DEF. Data $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata
Diciamo che f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se
$$_*\int_a^b f = {}^*\int_a^b f$$
e chiamiamo $\int_a^b f(x)\,dx = {}_*\int_a^b f = {}^*\int_a^b f$ integrale di Riemann di f in $[a,b]$

DEF. Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$
Diciamo che f è uniformemente continua se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x, \bar{x} \in X \quad |x-\bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

esempio $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua
Siano $x > \bar{x}$, allora $\sqrt{x} > \sqrt{\bar{x}}$
$x = \bar{x} + h$
Vogliamo che $\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\bar{x}+h} - \sqrt{\bar{x}} < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \sqrt{\bar{x}+h} < \varepsilon + \sqrt{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x}+h < \varepsilon^2 + \bar{x} + 2\varepsilon\sqrt{\bar{x}}$
$\Leftrightarrow h < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\bar{x}}$
Se prendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$: $h < \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\bar{x}}$

esempio $\sin x$ è uniformemente continua
Per Lagrange $\forall x, \bar{x}, x < \bar{x} \ \exists \tilde{x} \in (x, \bar{x})$ t.c. $\frac{\sin x - \sin \bar{x}}{x - \bar{x}} = \cos\tilde{x}$
$\Leftrightarrow \sin x - \sin\bar{x} = \cos(\tilde{x})(x - \bar{x})$
$\forall \varepsilon > 0$, prendo $\delta = \varepsilon$:
se $|x-\bar{x}| \leq \delta = \varepsilon \Rightarrow |\sin x - \sin\bar{x}| = |\cos\tilde{x}(x-\bar{x})| \leq 1\,|x-\bar{x}| \leq \delta = \varepsilon$

esempio f con $|f'| \leq L$
$\forall \varepsilon > 0$ prendo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$
Per Lagrange $\forall x, \bar{x}, \bar{x} < x \ \exists \tilde{x} \in (\bar{x}, x)$ t.c. $f(x) - f(\bar{x}) = f'(\tilde{x})(x - \bar{x})$
$\forall \varepsilon > 0$ prendo $|x - \bar{x}| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{L}$
Allora $|f(x) - f(\bar{x})| = |f'(\tilde{x})(x-\bar{x})| \leq L|x-\bar{x}| \leq L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

OSS Una funzione f non è uniformemente continua se
$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, \bar{x}$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta$ ma $|f(x) - f(\bar{x})| > \varepsilon$
In pratica, si fissa un ε, si mostra che esistono due successioni $(x_n), (\bar{x}_n)$ t.c. $|x_n - \bar{x}_n| \longrightarrow 0$ ma $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| > \varepsilon \ \forall n$

esempio
e^x non è UC $\quad x_n = \log(n+1)$, $\bar{x}_n = \log n \quad |x_n - \bar{x}_n| \to 0$ ma $|e^{x_n} - e^{\bar{x}_n}| = 1$
$\log x$ non è UC $\quad x_n = e^{-n}$, $\bar{x}_n = e^{-n+1}$
$\sin x^2 \quad x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $\bar{x}_n = \sqrt{2\pi n}$
$\sin x^a$: $a > 1$ non è UC $\quad x_n = \sqrt[a]{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $\bar{x}_n = \sqrt[a]{2\pi n}$
$0 < a < 1$ è UC

Teorema Data $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua
Allora f è uniformemente continua

"$f \in BUC([a,b])$"

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, suppongo f non sia uniformemente continua.
Fisso $\varepsilon>0$ Allora considero x_n e $\bar{x}_n$ t.c. $|x_n-\bar{x}_n| \le \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n)-f(\bar{x}_n)|>\varepsilon$
Per Bolzano-Weierstraß $\exists\ (x_{n_k}),(\bar{x}_{\bar{n}_k})$ sottosuccessioni t.c. $x_{n_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}x_0$, $\bar{x}_{\bar{n}_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}x_0$ con $x_0\in[a,b]$
Ora poiché f è continua, $f(x_{n_k})\longrightarrow f(x_0)$, $f(\bar{x}_{n_k})\longrightarrow f(x_0)$ [in realtà basta (n_k)]
allora $|f(x_{n_k})-f(\bar{x}_{n_k})| \longrightarrow |f(x_0)-f(x_0)|=0$ ↯

□

Teorema Data $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua
Allora f è integrabile secondo Riemann

Teorema dell'approssimazione dell'integrale
Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua
Preso $\varepsilon>0$, sia $\delta:=\delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$ il δ dell'uniforme continuità associato a $\frac{\varepsilon}{b-a}$
$\forall\varepsilon>0$ $\forall$ partizione di $[a,b]$ $\sigma=\{x_0,\dots,x_n\}$ con $\delta(\sigma)\le\delta$
$\forall$ scelta di punti $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ con $\bar{x}_i\in[x_{i-1},x_i]$
la somma di Riemann $S=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i-x_{i-1})$
approssima $\int_a^b f$ con errore inferiore a ε, ossia $\left|\int_a^b f - S\right|<\varepsilon$

DIMOSTRAZIONE

f continua $\Longrightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\}$ $\exists\ x_{min,i}, x_{max,i}\in[x_{i-1},x_i]$ t.c.
$f(x_{min,i})=m_i$ minimo di f in $[x_{i-1},x_i]$
$f(x_{max,i})=M_i$ massimo di f in $[x_{i-1},x_i]$
$f(x_{min,i})=m_i\le M_i=f(x_{max,i})$
da taglia di finezza della partizione σ è $<\delta$:
$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$ vale $|x-\bar{x}_i|<\delta$
Per uniforme continuità di f ho anche $|f(x)-f(\bar{x}_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$
In particolare: $|x_{min,i}-\bar{x}_i|<\delta \Rightarrow |m_i-f(\bar{x}_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow f(\bar{x}_i)-\frac{\varepsilon}{b-a}<m_i$
$|x_{max,i}-\bar{x}_i|<\delta \Rightarrow |M_i-f(\bar{x}_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow M_i<f(\bar{x}_i)+\frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\Rightarrow f(\bar{x}_i)-\frac{\varepsilon}{b-a}<m_i\le M_i<f(\bar{x}_i)+\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \left(f(\bar{x}_i)-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_i-x_{i-1})<m_i(x_i-x_{i-1})\le M_i(x_i-x_{i-1})<\left(f(\bar{x}_i)+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_i-x_{i-1})$$

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i-x_{i-1})}^{S}-\frac{\varepsilon}{b-a}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})}^{b-a}<\overbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})}^{S'(f,\sigma)}\le\overbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})}^{S''(f,\sigma)}<\overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i-x_{i-1})}^{S}+\frac{\varepsilon}{b-a}\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})}^{b-a}$$

$$\Rightarrow S-\varepsilon<S'(f,\sigma)\le S''(f,\sigma)<S+\varepsilon$$

(1) $-\varepsilon-S<-S'<\varepsilon-S$
$S-\varepsilon<S''<S+\varepsilon$
$\Rightarrow -2\varepsilon<S''-S'<2\varepsilon$
$\Rightarrow 0\le {}^*\!\int_a^b f-{}_*\!\int_a^b f\le S''-S'<2\varepsilon\quad\forall\varepsilon$
In particolare ${}^*\!\int_a^b f-{}_*\!\int_a^b f=0 \Rightarrow f$ è integrabile

(1)bis $S-\varepsilon\le\int_a^b f\le S+\varepsilon$
$\Rightarrow \left|\int_a^b f - S\right|\le\varepsilon$

□

Proprietà

(1) Additività: $a<b<c$ $\quad f:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrabile
$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$
Se f è limitata, vale anche per $_*\int_a^c f$ e $^*\int_a^c f$

(2) Linearità: $f_1, f_2:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrabili, $\lambda_1\in\mathbb{R}$
$$\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + f_2(t)\,dt = \lambda_1\int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt$$

$$\lambda_1\, {}_*\!\int_a^b f(t)\,dt = {}_*\!\int_a^b \lambda_1 f(t)\,dt \qquad \text{se } \lambda_1>0$$
$${}_*\!\int_a^b f_1+f_2 \geq {}_*\!\int_a^b f_1 + {}_*\!\int_a^b f_2$$

(3) Monotonia: $f_1, f_2:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrabili, $f_1(x)\leq f_2(x)$ $\forall x\in[a,b]$
$$\int_a^b f_1(t)\,dt \leq \int_a^b f_2(t)\,dt$$

(4) $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ è integrabile, allora $|f|$ è integrabile e
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

DEF. Dato $I\subset\mathbb{R}$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, $F:I\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile
Diciamo che F è una **primitiva** di f se
$$\forall x\in I \quad F'(x)=f(x)$$

> **Proposizione** Sia $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ continua, $a\in I$
> Definiamo $G(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ $\quad\forall x\in I$
> Allora G è derivabile e G è una primitiva di f

DIMOSTRAZIONE

Devo dimostrare che $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=f(x)$ $\quad\forall x\in I$

Faccio il caso $a\leq x\leq \sup I$ e $\displaystyle\lim_{h\to0^+}$ (il resto è analogo)

Sia $h>0$ t.c. $x+h\in I$
$$G(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = G(x)+\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$
$$\Rightarrow G(x+h)-G(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

f continua in x $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ t.c. $\forall t\in I$ $|t-x|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon$

Se $h<\delta$: $\quad f(x)-\varepsilon\leq f(t)\leq f(x)+\varepsilon$ $\quad\forall t\in[x,x+h]$
$$(f(x)-\varepsilon)h = \int_x^{x+h}(f(x)-\varepsilon)\,dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h}(f(x)+\varepsilon)\,dt = (f(x)+\varepsilon)h$$

$$\Rightarrow f(x)-\varepsilon \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq f(x)+\varepsilon$$

cioè $$f(x)-\varepsilon \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(x)+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right|<\varepsilon \quad \forall x\in I$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=f(x) \Longrightarrow G'(x)=f(x)$$ $\square$

Lemma Data $h: I \to \mathbb{R}$ derivabile con $h'(x)=0 \ \forall x \in I$
Allora $h(x)$ è costante

DIMOSTRAZIONE

Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 > x_2$
Per Lagrange $\exists\ \tilde{x} \in (x_2, x_1)$ t.c. $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2} = h'(\tilde{x}) = 0$
$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$ □

Teorema di Torricelli-Barrow Sia $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, F_1, F_2 primitive di f
Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F_1 = F_2 + c$

DIMOSTRAZIONE

$\forall x \in I \quad F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$
Sia $h := F_1 - F_2$
$\forall x \in I \quad h'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Per il lemma $h(x)$ è costante
In particolare $F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in I$ □

OSS se I non è un intervallo, la proposizione non è necessariamente vera
Infatti $L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f: L \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, $f(x) \equiv 0 \ \forall x \in L$
Considero $F_1(x) = 0 \ \forall x \in L$, $F_1' = f$ e $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$, $F_2' = f$

Teorema fondamentale del calcolo integrale Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e F una primitiva di f.
Allora:
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

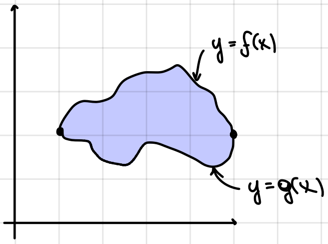
DIMOSTRAZIONE

Per la proposizione 2, la funzione definita come $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ \forall x \in [a,b]$ è una primitiva di f.
Per definizione $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$
Quindi $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \underset{\text{Prop 2+3}: \ G(x) = F(x)+c}{=} F(b)+c - (F(a)+c) = F(b) - F(a)$ □

OSS la continuità è necessaria

esempio $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$ $\qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$
$\exists x$ t.c. $G'(x) \neq f(x)$

NOTA.



$\text{area}(A) := \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$

esempio $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

f non è integrabile: $S''(f,\sigma) = {}^{*}\!\int_a^b f(x)dx = b-a$ $\quad S'(f,\sigma) = {}_{*}\!\int_a^b f(x)dx = 0$

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

Sia $D(f) = \{ x \in [a,b]$ t.c. f è discontinua in $x \}$

Proposizione 1 Se D è finito, f è integrabile.

Proposizione 2 Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1, \dots, I_n$ intervalli t.c. $\bigcup_{i=1}^{n} I_i \supset D$ e $\sum_{i=1}^{n} \text{lung}(I_i) < \varepsilon$, allora f è integrabile

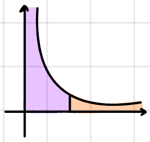
Teorema f integrabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I_i$ con $i = 1, \dots$ t.c. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_i \supset D$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \text{lung}(I_i) < \varepsilon$

L'integrale secondo Riemann è quello "giusto" per le funzioni continue

INTEGRALI IMPROPRI

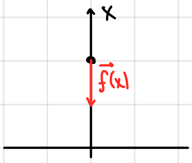
esempio Integrali che non rientrano nella teoria vista

$a>0, \int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$



$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$

esempio



$\varepsilon = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

DEF. Dato $a\in\mathbb{R}$, $b\in[a,+\infty]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice integrale improprio semplice in b se f è definita e continua su $[a,b)$ e f non è definita in b / non è continua in b

Equivalentemente: f è integrabile su $[a,b']$ $\forall b'<b$ ma non su $[a,b]$

Il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ è $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{b'\to b^-} \int_a^{b'} f(x)\,dx$, se esiste

dove $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ esiste perché f è continua su $[a,b']$ $\forall b'<b$

DEF. Dato $b\in\mathbb{R}$, $a\in[-\infty,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice integrale improprio semplice in a se f è definita e continua su $(a,b]$ e f non è definita in a / non è continua in a

Equivalentemente: f è integrabile su $[a',b]$ $\forall a'>a$ ma non su $[a,b]$

esempio $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ è un integrale improprio semplice in 0

$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx$ è improprio non semplice

$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ è improprio semplice in $+\infty$

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ è improprio non semplice

$\int_0^a \frac{1}{\cos x}\,dx$ per quali a è improprio semplice?

Comportamenti possibili di $\int_a^b f(x)\,dx$:

(1) esiste ed è finito (converge)

(2) è $+\infty$ (diverge a $+\infty$)

(3) è $-\infty$ (diverge a $-\infty$)

(4) non esiste

OSS Sia $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ continua con primitiva $F:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$

Allora $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)\,dx = \lim_{b'\to b^-} \left|F(x)\right|_a^{b'} = \left[\lim_{b'\to b^-} F(b')\right] - F(a) = \left|F(x)\right|_a^b$

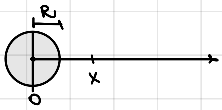
a patto di definire $F(b) = \lim_{b'\to b^-} F(b')$

esempio (*) $a\in\mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \underset{a\neq 1}{=} \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a<1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a>1 \end{cases}$

se $a=1$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left|\log x\right|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log 1 = +\infty$

→ Calcolo velocità di fuga dalla Terra

$E = \int \frac{GMm}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} m v_f^2$



(*) $a>0$, $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \underset{a\neq 1}{=} \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_0^1 = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$

$a=1$: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \left|\log x\right|_0^1 = \log 1 - \log 0 = 0 - (-\infty) = +\infty$

- $\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left|-e^{-x}\right|_a^{+\infty} = -e^{-\infty} + e^{-a} = e^{-a}$

  $\int_0^1 -\frac{1}{x}\,dx = -\infty$

- $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} = \left|\log(-x)\right|_{-1}^{0} = \log 0^+ - \log 1 = -\infty$

- $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \left|\sin x\right|_0^{+\infty} = \sin(+\infty) - \sin(0)$ NON ESISTE

Problema: Determinare il comportamento di $\int_a^b f(x)\,dx$ quando la primitiva non è nota

La notazione $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_c^d g(x)\,dx$ significa che i due integrali hanno lo stesso comportamento (se sono finiti, non sono necessariamente uguali)

Fatto 1 Il comportamento di $\int_a^b f(x)$ non dipende da a
(Se $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_{a'}^b f(x)\,dx$ sono impropri semplici in b, allora $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)$

DIMOSTRAZIONE

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$ e il comportamento è dato da $\lim_{x\to b^-} F(x)$ □

Fatto 2 Sia $f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ con limite L a $+\infty$
Allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } L>0 \\ -\infty & \text{se } L<0 \end{cases}$
Se $L=0$, tutti i comportamenti sono possibili

DIMOSTRAZIONE

Per $L>0$

Per la definizione di limite $\exists m$ t.c. $x\geq m \Rightarrow f(x)\geq \frac{L}{2}$

Quindi $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \approx \int_m^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_m^{+\infty} \frac{L}{2}\,dx = \left|\frac{L}{2}x\right|_m^{+\infty} = \frac{L}{2}\cdot(+\infty) - \frac{L}{2}\cdot m = +\infty$ □

esempio Trovare esempio di $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ e $\int_a^{+\infty} f(x)$ non esiste

Fatto 3 Se $f\geq 0$ in un intorno di b
allora $\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty \\ \text{numero finito} \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi esiste $a'\in[a,b)$ t.c. $f(x)\geq 0$ $\forall x\geq a'$

Sia $F:[a',b]\longrightarrow\mathbb{R}$ primitiva di f. Allora F è crescente

$\Longrightarrow \lim_{x\to b^-} F(x) = \sup\{F(x) : x\in[a',b]\} = +\infty$ oppure num. finito

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)\,dx = F(b^-) - F(a')$ □

Criteri di confronto

Siano $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
con $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ integrali impropri semplici in b

Criterio 1 Se $0 \le f \le g$ in un intorno di b, allora
(i) se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \implies \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$
(ii) se $\int_a^b g(x)dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi esiste $a < a' < b$ t.c. $0 \le f(x) \le g(x) \ \forall x \in [a', b]$
Allora $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx \approx \int_{a'}^b g(x)\,dx$
Quindi $\int_{a'}^b f(x) \le \int_{a'}^b g(x)\,dx$ $\square$

Criterio 2: confronto asintotico debole Se $f, g \ge 0$ in un intorno di b e $f(x) = O(g(x))$ per $x \to b^-$, allora
(i) se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \implies \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$
(ii) se $\int_a^b g(x)dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi esiste $0 < m < +\infty$ e $a' \in [a,b]$ t.c. $|f(x)| \le m|g(x)|$ per $a' \le x \le b$
Scegliendo l'intorno in cui sono positive (il minimo) $f(x) \le m g(x)$
Per il criterio 1, se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \implies \int_a^b m g(x)\,dx = +\infty$
$$\overset{\approx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$ $\square$

Criterio 3: confronto asintotico forte Se $f, g \ge 0$ in un intorno di b e esiste $0 < m < +\infty$ t.c. $f(x) \sim m g(x)$ per $x \to b^-$, allora
$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = m \implies f(x) = O(g(x))$
Inoltre $\lim_{x \to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{m} \implies g(x) = O(f(x))$
Applico il criterio 2: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx$ $\square$

OSS se $g \ge 0$ in un intorno di b e vale $f(x) \sim m\, g(x)$ per $x \to b^-$, $0 < m < +\infty$, allora $f \ge 0$ in un intorno di b

esempio (*) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx \underset{y = \log x,\ dy = \frac{1}{x}dx}{=} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^a}\,dy = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \le 1 \\ \frac{(\log 2)^{1-a}}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

(*) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \log x}\,dx \underset{y = \log x,\ dy = \frac{1}{x}dy}{=} \int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{1}{y}\,dy = \left|\log(-y)\right|_{-\infty}^{-\log 2} = \log\log 2 - \log(+\infty) = -\infty$$

esempio

- $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x}{x^2+x^4}\,dx \approx \int_0^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

  $\sin x \sim x$, $x^2+x^4 \sim x^2 \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x^2+x^4} \sim \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$

- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+1}\,dx \approx \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ finito

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ finito

  $\sqrt{\tan x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0^+$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^6+1}{e^x+x^2}\,dx \approx \int_0^{+\infty} \frac{x^6}{e^x}\,dx$ è finito per confronto asintotico con $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$

  per $x \to +\infty$: $x^6+1 \sim x^6$, $e^x+x^2 \sim e^x$

  $e^x \gg x^a \ \forall a$

  $\dfrac{1}{e^x} \ll \dfrac{1}{x^a} \ \forall a \Rightarrow \dfrac{x^6}{e^x} \ll \dfrac{1}{x^{a-6}} \Rightarrow \dfrac{x^6}{e^x} = o\left(\dfrac{1}{x^{a-6}}\right) = O\left(\dfrac{1}{x^{a-6}}\right) \underset{\text{prendo } a=8}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\,dx$ è finito per confronto asintotico con $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$

  $\dfrac{1}{x^2\log x} \ll \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 \log x} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log x - 5}{x+\sin x}\,dx \approx \int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$ per confronto asintotico con $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

  per $x \to +\infty$: $\log x - 5 \sim \log x$ e $\dfrac{\log x}{x} \gg \dfrac{1}{x}$

  $x + \sin x \sim x \Rightarrow \dfrac{\log x - 5}{x+\sin x} \sim \dfrac{\log x}{x}$ cioè $\dfrac{1}{x} = O\left(\dfrac{\log x}{x}\right)$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$ finito per confronto con $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} < +\infty$

  $\log x \ll x^a \ \forall a>0$

  $\dfrac{\log x}{x^2} \gg \dfrac{1}{x^2}$ vera ma inutile

  $\dfrac{\log x}{x^a} \ll \dfrac{1}{x^{2-a}} \underset{\text{per } a=\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \dfrac{\log x}{x^2} \ll \dfrac{1}{x^{3/2}}$

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$

  $\log x \ll x^a \ \forall a>0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log x} \gg \dfrac{1}{x^a} \ \forall a>0$

  $\dfrac{1}{x(\log x)^2} \ll \dfrac{1}{x}$ (inutile)

  $\Rightarrow \dfrac{1}{(\log x)^2} \gg \dfrac{1}{x^{2a}} \ \forall a>0 \Rightarrow \dfrac{1}{x(\log x)^2} \gg \dfrac{1}{x^{2a+1}} \ \forall a>0$ (inutile)

  Bisogna fare il calcolo esplicito

esempio

Discutere il comportamento al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ di $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a (\log x)^b}\,dx$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a(\log x)^b}\,dx \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{finito} & \text{se } a>1 \\ \text{finito} & \text{se } a=1,\ b>1 \\ +\infty & \text{se } a=1,\ b\le 1 \\ +\infty & \text{se } a<1 \end{cases}$$

esempio

- $\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx \underset{y=x-1,\ dy=dx}{=} \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy \approx \int_0^2 \frac{1}{y}\,dy = +\infty$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\,dx \underset{\substack{y=\frac{\pi}{2}-x \\ dy=-dx}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{1}{\sqrt{\sin y}}\,dy \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$

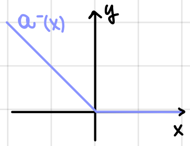
DEF Dato $a \in \mathbb{R}$, la sua **parte positiva** è $a^+ = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}$

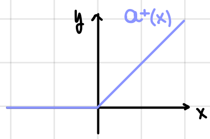
la sua **parte negativa** $a^- = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \\ -a & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$

esempio $(2)^+ = 2$, $(2)^- = 0$ $\quad (-2)^+ = 0$, $(-2)^- = 2$

OSS $0 \leq a^+ \leq |a| \qquad 0 \leq a^- \leq |a|$

$a = a^+ - a^- \qquad |a| = a^+ - a^-$





criterio della convergenza assoluta	Sia $\int_a^b f(x)\,dx$ improprio in b Se $\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ è finito, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito

DIMOSTRAZIONE

$f = f^+ - f^-$ con $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq |f^-| \leq |f|$

$\Rightarrow \int_a^b f^+\,dx$ e $\int_a^b f^-\,dx$ esistono finiti

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x) - f^-(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)$ esiste ed è finito $\square$

esempio Studiare $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è finito

$0 \leq |\cos x| \leq 1$

Per la prop $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge

esempio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ esiste finito anche se $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = +\infty$

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} = \lim_{c\to+\infty} \left(\underbrace{\left|-\frac{\cos x}{x}\right|_1^c}_{-\frac{\cos(c)}{c}+\cos(1) \longrightarrow \cos(1)} - \underbrace{\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{finito}} \right)$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \longrightarrow +\infty$

$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$+\infty \qquad\qquad c$

DEF. Dati $a<b \in \overline{\mathbb{R}}$

Diciamo $\int_a^b f(x)\,dx$ è improprio se posso trovare $a_0=a<a_1<\dots<a_n=b$ t.c.

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx,\ \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx,\ \dots,\ \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx \quad \text{sono integrali impropri semplici}$$

Se tutti gli integrali impropri semplici esistono finiti allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste finito e vale $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$

esempio
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$Dom\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

esempio
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\log x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\log x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\log x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x}\,dx$$
è improprio in $0, 1, +\infty$

esempio
$$\int_0^c \frac{1}{\sin x}\,dx$$

esempio $a>0$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(e^x-e^2)^{3a}}\,dx$

è improprio in $2, +\infty$

$I_1 := \int_2^3 \frac{1}{(e^x-e^2)^{3a}}\,dx$ e $I_2 := \int_3^{+\infty} \frac{1}{(e^x-e^2)^{3a}}\,dx$

$$I_1 = \int_2^3 \frac{1}{(e^x-e^2)^{3a}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{(e^2(e^{x-2}-1))^{3a}}\,dx = \frac{1}{e^{6a}}\int_2^3 \frac{1}{(e^{x-2}-1)^{3a}}\,dx \underset{t=x-2}{=} \frac{1}{e^{6a}}\int_0^1 \frac{1}{(e^t-1)^{3a}}\,dt$$

per $t\to 0$ $e^t-1 \sim t$

$I_1 \approx \int_0^1 \frac{1}{t^{3a}}\,dt$ per $a \geq \frac{1}{3}$ diverge, per $a<\frac{1}{3}$ converge

$I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(e^x-e^2)^{3a}}\,dx \approx \int_3^{+\infty} \frac{1}{(e^x)^{3a}}\,dx$

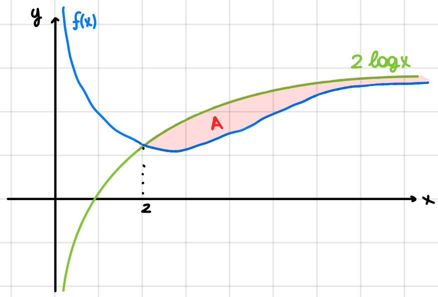
$\frac{1}{e^{3ax}} \ll \frac{1}{x^2} \Rightarrow I_2$ converge (oppure si calcola)

esempio $f(x) = \log\left(x^2-1+\frac{4}{x^2}\right)$

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq 2\log x\}$

area(A) è finita?

Osservo che se $x>0$, $2\log x = \log x^2$



D: $x \neq 0$

$\frac{x^4-x^2+4}{x^2} > 0 \quad x^2=t \quad t^2-t+4=0 \ \forall x$

$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = \frac{2x^4-8}{x(}$

$f'(x)\geq 0$: $(x^2-2)(x^2+2)\geq 0 \quad f(\sqrt{2}) = \log 3$

$\log(x^2) \geq \log\left(x^2-1+\frac{4}{x^2}\right)$

$$\text{Area}(A) = \int_2^{+\infty} \log x^2 - \log\left(x^2-1+\frac{4}{x^2}\right)dx = \int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x^2}{\frac{x^4-x^2+4}{x^2}}\right)dx =$$

$$= \int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x^4}{x^4-x^2+4}\right)dx = \int_2^{+\infty} \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4}}\right) \approx \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{finito}$$

$$\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4}}\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} -\log(1-t^2+t^4) = -\left((-t^2+t^4) - \frac{1}{2}(-t^2+t^4)^2 + O(t^4)\right) = -\left(-t^2+t^4-\frac{1}{2}t^4+O(t^4)\right) =$$

$$= t^2 + O(t^4) = \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

esempio

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}}\,dx$$

$x>0,\ x\neq 1,\ x>1$: è improprio in $1, +\infty$

$\left((\log x)^{ax}=e^{\log((\log x)^{ax})}=e^{ax\log\log x}\right)$

$$I=\int_1^2\frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}}\,dx+\int_1^2\frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}}\,dx$$

$$I_1=\int_1^2\frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}}\,dx\underset{x=1+t}{=}\int_0^1\frac{1+(1+t)^2}{\underbrace{(\log(1+t))^{a(1+t)}}_{\sim t^a}}\,dt\approx 2\int_0^1\frac{1}{t^a}\,dt$$ se $a\geq 1$ diverge, se $a<1$ converge

I_2 : $x^4\ll e^{ax}\ll e^{ax\log\log x}\longrightarrow\frac{x^2}{e^{ax\log\log x}}\ll\frac{x^2}{e^{ax}}\ll\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1+x^2}{e^{ax\log\log x}}\,dx\leq\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$ che converge

SERIE

DEF. Data una successione $(a_n) \subset \mathbb{R}$,
la somma infinita o serie degli a_n è $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ e $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ la somma parziale

esempio $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$

Comportamenti possibili di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
- è un numero finito ("la serie converge")
- è $+\infty$ ("la serie diverge a $+\infty$")
- è $-\infty$ ("la serie diverge a $-\infty$")
- non esiste

esempio **Serie geometrica**

Dato $x \in \mathbb{R}$, considero $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{N.E.} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Se $x = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

DIMOSTRAZIONE

$S_N = 1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}$ per $x \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{N.E} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \quad \square$$

Problema: Determinare il comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

La notazione $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ significa che le due serie hanno lo stesso comportamento
(se sono finite, non sono necessariamente uguali)

Fatto 1 Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a L finito, allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
(Non vale il contrario)

DIMOSTRAZIONE

$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L - L = 0 \quad \square$

esercizio Se $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, $L > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$
$L < 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$

Fatto 2 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$

Più in generale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se $\exists n_0$ t.c. $a_n = b_n \ \forall n \geq n_0$

DIMOSTRAZIONE

Sia S_N la somma parziale di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Sia $\tilde{S}_N$ la somma parziale di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$

$S_N = a_1 + \dots + a_{n_0-1} + \tilde{S}_N$

...

$S_N = (a_1 - b_1) + \dots + (a_{n_0-1} - b_{n_0-1}) + \tilde{S}_N$ □

Fatto 3 Se $a_n \geq 0$ (definitivamente in n), $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ L \in \mathbb{R} \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE

$a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$

$S_N - S_{N-1} = a_N \geq 0$ se $N \geq n_0$

$\Rightarrow S_N$ è crescente per $N \geq n_0$

$\Rightarrow S_N$ ha limite finito o $+\infty$ per $N \longrightarrow +\infty$ □

Teorema del confronto serie-integrale

Data $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.
- f positiva
- f decrescente
- f continua

Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ esistono ($+\infty$ o numero finito)

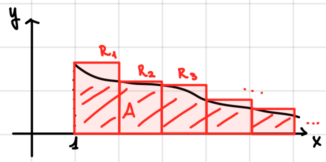
e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

In particolare $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \approx \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ (*)

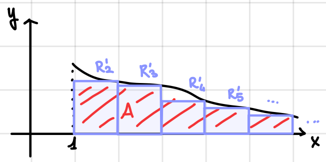
[Per (*), f positiva e decrescente da un certo x_0 in poi]

DIMOSTRAZIONE (idea)

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A) \leq \text{area}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{area}(R_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$



$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area}(A) \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \text{area}(R'_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$



DIMOSTRAZIONE

(1) $\int_1^N f(x)\,dx \leq S''(f, \sigma) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sup_{n \leq x \leq n+1} f(x) \right)(n+1-n) = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$

$\sigma = \{1, \dots, N\}$ f decrescente

$\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = S_{N-1}$

$\downarrow N \to +\infty$ $\downarrow N \longrightarrow +\infty$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \iff \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$\int_1^N f(x)\,dx \geq S'(f, \sigma) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\inf_{n \leq x \leq n+1} f(x) \right)(n+1-n) = \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)$

$\sigma = \{1, \dots, N\}$

$\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = S_N - f(1)$

$\downarrow N \to +\infty$ $\downarrow N \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - f(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$ □

esempio **Serie armonica generalizzata**

Dato $a>0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a\leq 1 \\ \text{finito} & \text{se } a>1 \end{cases}$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (problema di Basilea)

criteri di confronto

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie.

criterio 1

Se $0\leq a_n \leq b_n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

In particolare

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

Se $0\leq a_n \leq b_n$ definitivamente in n (cioè $\forall n \geq n_0$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi $\exists n_0$ t.c. $n\geq n_0 \implies 0\leq a_n \leq b_n$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \approx \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$

Inoltre vale $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ □

criterio del confronto asintotico debole

Se $a_n, b_n \geq 0$ definitivamente in n e $a_n = O(b_n)$ per $n\to+\infty$

Allora

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

DIMOSTRAZIONE

$a_n = O(b_n) \implies \exists\, 0<m<+\infty$ e n_0 t.c. per $n\geq n_0$ $|a_n| \leq m|b_n|$

$\longrightarrow 0\leq a_n \leq m\, b_n$

Si applica il criterio 1 a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} m\, b_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ □

criterio del confronto asintotico forte

Se $a_n, b_n \geq 0$ definitivamente in n e esiste $0<m<+\infty$ t.c. $a_n \sim m b_n$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

DIMOSTRAZIONE

$a_n \sim m b_n \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{m b_n} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = m \implies a_n = O(b_n)$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{m} \implies b_n = O(a_n)$

Applicando il criterio del confronto asintotico debole:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ □

esempio $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$

esempio **Serie telescopiche**

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con a_n t.c. $\exists (b_n)$ per cui $a_n = b_n - b_{n+1}$ $\forall n$ e $b_n \longrightarrow 0$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \ldots + b_{N-1} - b_N + b_N - b_{N+1} = b_1 - b_{N+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = b_1$$

esempio $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{N-1}} - \cancel{\frac{1}{N}} + \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$

esempio Determinare il comportamento di

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-8}{n^4+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(\approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx\right)$ finito

  $\displaystyle\frac{n^2-8}{n^4+1} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} = +\infty$ per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

  $n \geq 3 \Rightarrow \log n \geq 1 \Rightarrow \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$

  (oppure $\log n \gg 1 \Rightarrow \frac{\log n}{n} \gg \frac{1}{n}$)

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$ finito per confronto asintotico debole con $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

  $3^n \gg n^a \ \forall n$

  $\displaystyle\frac{1}{3^n} \ll \frac{1}{n^a} \Rightarrow \frac{n^3}{3^n} \ll \frac{n^3}{n^a} = \frac{1}{n^{a-3}} \overset{a=5}{=} \frac{1}{n^2}$

  $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e^n}{1+e^n} = -\infty$

  $\displaystyle\frac{1-e^n}{1+e^n} \sim \frac{-e^n}{e^n} = -1$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ finito

  $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

  $\displaystyle 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

- $\displaystyle S_{a,b} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^b}$

  Se $a>1$ $b>0$ $\displaystyle\frac{1}{n^a(\log n)^b} \leq \frac{1}{n^a}$ per $n \geq 3 \Rightarrow S_{a,b}$ converge per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$

  $\underset{\beta=|b|}{b<0}$ $\displaystyle\frac{(\log n)^\beta}{n^a} \ll \frac{n^{\delta|b|}}{n^a} = \frac{1}{n^{a-\delta|b|}} \Rightarrow S_{a,b}$ converge per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a-|b|\delta}}$

  $\log n \ll x^\delta \ \forall \delta>0$ $\quad$ scelgo $0<\delta$ t.c. $a-|b|\delta>1$

  Se $a<1$ $S_{a,b} = +\infty$ per confronto con $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a'}}$ $a<a'<1$

  Se $a=1$ confronto con l'integrale

  $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^b} \approx \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^b}\,dx \underset{\log x = y}{=} \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^b}\,dy = \begin{cases} +\infty & \text{se } b \leq 1 \\ \text{finito} & \text{se } b>1 \end{cases}$$

  perché $f'(x) = -x^{-2}(\log x)^{-b-1}(\log x + b) \leq 0$ per x abbastanza grande $(x>e^{-b})$

serie a segno variabile

criterio della convergenza assoluta — Data $(a_n) \subset \mathbb{R}$
Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a un numero finito

DIMOSTRAZIONE

Scrivo $a_n = a_n^+ - a_n^-$ $\quad 0 \le a_n^{\pm} \le |a_n|$

$\sum_{i=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n^-$ convergono per confronto con $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ finito $\square$

<u>OSS</u> $\sum_{i=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_n + \sum_{i=1}^{+\infty} b_n$ se $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n, \sum_{i=1}^{+\infty} b_n$ esistono e non sono $+\infty$ e $-\infty$

<u>OSS</u> Se $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, si dice che la serie converge assolutamente

<u>ACHTUNG</u> Se $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ può avere tutti i possibili comportamenti

esempio
$a_n = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$
$a_n = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$
$a_n = (-1)^n$: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ N.E.

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge perché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

esempio **Serie a segni alterni**

criterio di Leibniz — Sia (a_n) successione con a_n decrescente a 0
allora $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge

DIMOSTRAZIONE

S_N con N pari decresce

$S_{N+2} = S_N + (-1)^{N+1} a_{N+1} + (-1)^{N+2} a_{N+2} = S_N - a_{N+1} + a_{N+2} = S_N - (\overset{0}{\wedge}{a_{N+1} - a_{N+2}}) < S_N$

Allo stesso modo S_N con N dispari cresce

$\Rightarrow S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{N \text{ pari}} L_P \in [-\infty, +\infty)$ e $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{N \text{ dispari}} L_D \in (-\infty, +\infty]$

$S_{N+1} - S_N = (-1)^{N+1} a_{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

se N pari: $\underset{L_D}{S_{N+1}} - \underset{L_P}{S_N}$ $\Rightarrow L_D - L_P = 0 \Rightarrow L_D = L_P = L \in \mathbb{R}$ $\square$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non converge assolutamente

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ che converge a L

Dato $\varepsilon>0$, si vuole calcolare L con errore $\leq \varepsilon$

Si cerca N t.c. $|S_N - L| \leq \varepsilon$

Il problema è stimare

$$S_N - L = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \quad \text{(coda della serie)}$$

Lemma Se $f:[N,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e decrescente t.c. $|a_n| \leq f(n)$, allora

$$|S_N - L| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \right| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

$$|S_N - L| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. confronto} \\ \text{serie - integrali}}}{\leq} \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\square$

esempio Come prendere N in modo che $\underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right|}_{|S_N - L|} \leq 10^{-2}$?

$$|S_N - L| \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{N} \leq 10^{-2} \quad \text{se } N=100$$

criterio della radice Sia (a_n) una successione con $a_n \geq 0$, t.c. esiste $L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(i) se $L<1$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e più precisamente $a_n \ll \lambda^n \ \forall L<\lambda<1$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ (per confronto con $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$)

(ii) se $L>1$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ e più precisamente $a_n \gg \lambda^n \ \forall 1<\lambda<L$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

DIMOSTRAZIONE

(i) Basta far vedere $a_n \ll \lambda^n \ \forall L<\lambda<1$

Scelgo ℓ t.c. $L<\ell<\lambda<1$

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L$, $\exists n_0$ t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \ell$

$\Rightarrow a_n \leq \ell^n \ll \lambda^n$

(ii) Basta far vedere $a_n \gg \lambda^n \ \forall 1<\lambda<L$

Prendo ℓ t.c. $1<\lambda<\ell<L$

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L$, $\exists n_0$ t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq \ell$

$\Rightarrow a_n \geq \ell^n \gg \lambda^n$

$\square$

OSS Se $L=1$, non sappiamo nulla né su $\lim_{n\to+\infty} a_n$ né sul comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

esempio Se $a_n = n^a$ con $a \in \mathbb{R}$ allora $L=1$

$$\sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1}{n}\log(n^a)} = e^{a\frac{\log n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{a\cdot 0} = 1$$

criterio del rapporto

Sia (a_n) una successione con $a_n > 0$, t.c. esiste $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(i) se $L<1$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e più precisamente $a_n \ll \lambda^n \quad \forall L<\lambda<1$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ (per confronto con $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$)

(ii) se $L>1$ allora $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ e più precisamente $a_n \gg \lambda^n \quad \forall 1<\lambda<L$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

DIMOSTRAZIONE

(i) Basta far vedere $a_n \ll \lambda^n \quad \forall L<\lambda<1$

Scelgo ℓ t.c. $L<\ell<\lambda<1$

Siccome $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L$, $\exists n_0$ t.c. $n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell \Rightarrow a_{n+1} \leq \ell a_n$

- $a_{n_0+1} \leq \ell a_{n_0}$
- $a_{n_0+2} \leq \ell a_{n_0+1} \leq \ell^2 a_{n_0}$

Per induzione: $a_{n_0+k} \leq \ell^k a_{n_0} \quad \forall k=0,1,2,\dots$

$\Longrightarrow a_n \leq \ell^{n-n_0} a_{n_0} = \ell^n \frac{a_{n_0}}{\ell^{n_0}}$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq c\ell^n \ll \lambda^n$

con $c = \frac{a_{n_0}}{\ell^{n_0}}$

(ii) Basta far vedere $a_n \gg \lambda^n \quad \forall 1<\lambda<L$

Prendo ℓ t.c. $1<\lambda<\ell<L$

Siccome $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L$, $\exists n_0$ t.c. $n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \ell \Rightarrow a_{n+1} \geq \ell a_n$

- $a_{n_0+1} \geq \ell a_{n_0}$

Per induzione $a_{n_0+k} \geq \ell^k a_{n_0} \quad \forall k=0,1,2,\dots$

$a_n \geq \ell^{n-n_0} a_{n_0} = \ell^n \frac{a_{n_0}}{\ell^{n_0}}$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq c\ell^n \gg \lambda^n$

con $c = \frac{a_{n_0}}{\ell^{n_0}}$ $\square$

<u>OSS</u> Se $L=1$, non sappiamo nulla né su $\lim_{n\to+\infty} a_n$ né sul comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

esempio Se $a_n = n^a$ con $a \in \mathbb{R}$ allora $L=1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a}{n^a} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n!}$

Applico il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{4}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$L=0 \Longrightarrow$ la serie converge

esempio $n! \gg \lambda^n \quad \forall \lambda>1$

Uso il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$L=+\infty$

esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Uso il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}$

$L = \frac{1}{4} < 1 \Longrightarrow$ la serie converge

criterio della radice per serie a segno variabile

Sia (a_n) successione in $\mathbb{R}$ t.c.
esiste $L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(i) se $L<1$, $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e più precisamente $|a_n| \ll \lambda^n$ $\forall\, L<\lambda<1$
In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(ii) se $L>1$, $|a_n| \gg \lambda^n$ $\forall\, 1<\lambda<L$, quindi $|a_n| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge a un numero finito

criterio del rapporto per serie a segno variabile

Sia (a_n) successione in $\mathbb{R}$ t.c.
esiste $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(i) se $L<1$, $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e più precisamente $|a_n| \ll \lambda^n$ $\forall\, L<\lambda<1$
In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(ii) se $L>1$, $|a_n| \gg \lambda^n$ $\forall\, 1<\lambda<L$, quindi $a_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge a un numero finito

criterio della radice (variante)

Sia (a_n) successione con $a_n \geq 0$ e sia $L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(i) se $L<1$ allora $a_n \ll \lambda^n$ $\forall \lambda$ t.c. $L<\lambda<1$ $\implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

(ii) se $L>1$ allora $\forall\, 1<\lambda<L$ esiste n_k t.c. $a_{n_k} \gg \lambda^{n_k} \implies a_n \not\to 0 \implies \sum a_n = +\infty$

proposizione

Sia (a_n) successione con $a_n > 0$ t.c. esiste $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
Allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

DIMOSTRAZIONE

Suppongo $0<L<+\infty$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| \leq \varepsilon \implies -\varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \leq \varepsilon$

$\implies (L-\varepsilon)\, a_n \leq a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_n$

- $(L-\varepsilon)\, a_{n_\varepsilon} \leq a_{n_\varepsilon+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_{n_\varepsilon}$

Per induzione: $(L-\varepsilon)^k a_{n_\varepsilon} \leq a_{n_\varepsilon+k} \leq (L+\varepsilon)^k a_{n_\varepsilon}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

$\implies (L-\varepsilon)^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon}$ $\quad \forall n \geq n_\varepsilon$

$(L-\varepsilon)^n\, C' \leq a_n \leq (L+\varepsilon)^n\, C''$ $\quad$ con $C' = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(L-\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$ e $C'' = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(L+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$

$$\implies \sqrt[n]{C'}\,(L-\varepsilon) \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{C''}\,(L+\varepsilon)$$

$\downarrow n\to+\infty$ $\qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$

$$L-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L+\varepsilon \implies L-\varepsilon \leq L' \leq L'' \leq L+\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon\to 0} L = L' = L''$$

$\square$

<u>OSS</u> il viceversa non vale:
può succedere che esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ma non esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

<u>esempio</u> $\quad a_n = \begin{cases} 2n^a & n \text{ pari} \\ n^a & n \text{ dispari} \end{cases}$

serie di Taylor

DEF. Sia f derivabile infinite volte in 0.
La serie di Taylor di f in 0 è
$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D^n f(0)}{n!}x^n$$

<u>Domanda</u>: relazione tra $f(x)$ e la serie di Taylor

<u>OSS</u> Fissato x, se $R_d(x)\xrightarrow[d\to+\infty]{}0$
allora $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D^n f(0)}{n!}x^n=f(x)$

DIMOSTRAZIONE
$$S_d(x)=\sum_{n=0}^{d}\frac{D^n f(0)}{n!}x^n=P_d(x)=f(x)-R_d(x)\xrightarrow[d\to+\infty]{}f(x)\quad\square$$

Esiste $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ di classe $C^{+\infty}$ (esistono tutte le derivate e sono continue)
t.c. la serie di Taylor converge solo per $x=0$
Esiste $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ di classe $C^{+\infty}$
t.c. $f(x)\neq 0\ \forall x\neq 0$ ma $D^n f(0)=0\ \forall n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D^n f(0)}{n!}x^n=0$

Consideriamo solo alcune funzioni elementari

(1) $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\quad\forall x\in\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE
$$R_d f(x)=\frac{D^{d+1}f(\tilde{x})}{(d+1)!}x^{d+1}=\frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!}x^{d+1}$$
formula di Lagrange: $\exists\tilde{x}\in[0,x]$, $\tilde{x}=\tilde{x}(x,d)$

$$|R_d(x)|\leq\frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!}|x|^{d+1}\leq\frac{e^{|x|}}{(d+1)!}|x|^{d+1}$$

Mi basta vedere che $\frac{|x|^{d+1}}{(d+1)!}\xrightarrow[d\to+\infty]{}0$
Uso il criterio del rapporto con $a_d=\frac{|x|^d}{d!}$
$$\frac{a_{d+1}}{a_d}=\frac{|x|^{d+1}}{(d+1)!}\cdot\frac{d!}{|x|^d}=\frac{|x|}{d+1}\xrightarrow[d\to+\infty]{}0\quad\square$$

(2) $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\quad\forall x\in\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

Def. Si definisce il numero e come il valore della serie di Taylor di e^x per $x=1$:
$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

esercizio Calcolare e con errore $\leq 10^{-3}$

Def. Dato $z \in \mathbb{C}$, si definisce
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

La serie converge perché $e^{|z|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} < +\infty$

corollario $$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x$$

Def. Data $M \in M(d, \mathbb{C})$, si definisce
$$e^M := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Def. Data $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dico che $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{C}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \implies |z_n - L| \leq \varepsilon$

Def. Data $(v_n) \subset \mathbb{R}^d$ (o $\mathbb{C}^d$), dico che $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}^d$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \implies \| v_n - L \| \leq \varepsilon$

proposizione $$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff \begin{cases} Re(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Re(L) \\ Im(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Im(L) \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

Hint. $|Re z|, |Im z| \leq |z| \leq |Re z| + |Im z|$

proposizione $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff (v_n)_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} (L)_i$ per $i = 1, \dots, d$

Def. Data $(z_n) \subset \mathbb{C}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n$$

proposizione (convergenza assoluta) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge

DIMOSTRAZIONE

$+\infty > \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| \geq \sum_{n=0}^{+\infty} Re\, z_n \implies \sum_{n=0}^{+\infty} Re\, z_n$ converge

$+\infty > \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| \geq \sum_{n=0}^{+\infty} Im\, z_n \implies \sum_{n=0}^{+\infty} Im\, z_n$ converge

$\implies \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge $\square$

serie di potenze

DEF. Data una successione $(a_n) \subset \mathbb{R}$ (oppure $(a_n) \subset \mathbb{C}$) la serie di potenze associata è:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

<u>Domanda</u>: per quali $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$), la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge?

DEF. Sia $L := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, sia $R := \frac{1}{L}$ (convenzione: $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$)

R si chiama raggio di convergenza della serie

Teorema Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serie di potenze con raggio di convergenza R

(i) Dato $x \in \mathbb{C}$, con $|x| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge (assolutamente)

(ii) Dato $x \in \mathbb{C}$, con $|x| > R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge (più precisamente $a_n x^n \not\to 0$)

DIMOSTRAZIONE

Applico il criterio della radice a $|a_n x^n|$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| L$$

Se $|x| < R$, $|x|L < RL = 1$, quindi $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$

quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge

Se $|x| > R$ $|x|L > LR = 1$, quindi $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$

quindi $|a_n x^n| \not\to 0 \Rightarrow a_n x^n \not\to 0$, quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge $\square$

<u>OSS</u> Non si sa dire nulla a priori se $|x| = R$

<u>Problema</u>: calcolo di R

<u>NOTA</u> $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ per $|x| < R$

Derivabile infinite volte e $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Vale: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ se il limite se esiste

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ se il limite esiste

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$ $a_n = \frac{1}{n^n}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{|n^n|}} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $R = +\infty$: la serie converge $\forall x \in \mathbb{C}$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

$\sqrt[n]{|n^n|} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $R = 0$: la serie converge solo per $x = 0$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n = +\infty$ se $x > 0$

Per $x < 0$?

esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2^n + n) x^n$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n + n} \sim \sqrt[n]{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ $R = \frac{1}{2}$

In generale: $a_n \sim b_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$

Infatti: $\sqrt[n]{\frac{b_n}{a_n}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{b_n}{a_n}} \longrightarrow e^0 = 1$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} x^{2n} = 3x^2 + \frac{3^2}{2}x^4 + \dots$ con $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{3^{n/2}}{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$

limsup $\sqrt[n]{a_n}$:

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n/2}}{n/2}} = \frac{3^{1/2}}{\sqrt[n]{n/2}} = \frac{\sqrt{3}}{\exp(\frac{1}{n}(\log n/2))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{3} \qquad \text{ma } \sqrt[n]{0} = 0$$

$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[2n]{\frac{3^n}{n}} \longrightarrow \sqrt{3}$

esercizio Calcola $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^{n^2}$ $\qquad \sqrt[n^2]{n^n} = n^{\frac{1}{n}}$

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n!}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow ?$ NO

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow R = +\infty$: la serie converge per ogni $x \in \mathbb{C}$

esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\sqrt{n}}{n!} x^n$ $\qquad a_n = \frac{4^n\sqrt{n}}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{4^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n\sqrt{n}}{n!}} = \frac{4}{\sqrt{(n+1)n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow R = +\infty$$

esempio Calcolare $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $\qquad (R = +\infty)$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} - (1-x^2) = e^{-x^2} - 1 + x^2$$

esempio
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{in})}{2^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n = \operatorname{Re} \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall |z| < 1$$

esempio Il numero e

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

- $e \le 3$: $\qquad n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}_{n-1 \text{ fattori}} \geq 2^{n-1}$

$$\Rightarrow e \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \le 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

- calcolare e con errore inferiore a 10^{-3}:

$e = P_d(1) + R_d(1)$

$\quad \overset{\shortparallel}{\sum_{n=0}^{d} \frac{1}{d!}}$ $\qquad$ Cerco d t.c. $|R_d(1)| \le 10^{-3}$

$$R_d(x) = \frac{D^{d+1} f(\tilde{x})}{(d+1)!} x^{d+1} \qquad 0 \le R_d(1) = \frac{e^{\tilde{x}}}{(d+1)!} \le \frac{e}{(d+1)!} \le \frac{3}{(d+1)!} \underset{d=6}{=} \frac{1}{1680}$$

$0 \le \tilde{x} \le 1$

$$\Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \pm 10^{-3} = \frac{1957}{720} \pm 10^{-3}$$

- $e^x = \lim_{y\to0} (1+xy)^{\frac{1}{y}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $\qquad e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$(1+xy)^{\frac{1}{y}} = \exp\Big(\frac{1}{y} \overbrace{\log(1+xy)}^{\underset{\sim}{xy}}\Big) \longrightarrow \exp x = e^x$$

esempio Dato $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la serie di Taylor di $(1+x)^a$ è

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad \text{dove} \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

$$a_n = \binom{a}{n} \; : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\binom{a}{n+1}\right|}{\left|\binom{a}{n}\right|} = \left| \frac{\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}}{\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |-1| = 1 \implies R = 1$$

la serie converge a $(1+x)^a$ per $-1<x<1$ (e per $x=\pm 1$?)

cioè $R_d(x) \xrightarrow[d\to+\infty]{} 0$

Con la formula di Lagrange, $-\frac{1}{2}<x<1$ è ok

Uso la formula del resto integrale:

$$R_d(x) = \frac{1}{d!}\int_0^x (x-t)^d D^{d+1} f(t)\,dt$$

$$D^{d+1}(1+t)^a = a(a-1)\cdots(a-d)(1+t)^{a-d-1} \longrightarrow R_d(x) = \frac{a(a-1)\cdots(a-d)}{d!}\int_0^x (x-t)^d (1+t)^{a-d-1}\,dt =$$

$t = xs$, $dt = x\,ds$ con $0 \le s \le 1$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-d)}{d!}\int_0^1 x^{d+1}(1-s)^d (1+xs)^{a-d-1}\,ds =$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-d)}{d!} x^{d+1} \int_0^1 \underbrace{(1-s)^d (1+xs)^{a-d-1}}_{\text{positivo}}\,ds$$

$$\implies |R_d(x)| = \Bigg|\overbrace{\frac{a(a-1)\cdots(a-d)}{d!}}^{a_d} x^{d+1}\Bigg| \int_0^1 (1-s)^d (1+xs)^{a-d-1}\,ds =$$

$$= |a_d| \int_0^1 (1+xs)^{a-1}\left(\frac{1-s}{1+xs}\right)^d ds \le |a_d| \int_0^1 \underbrace{(1+xs)^{a-1}\,ds}_{\text{finito}}$$

per $-1<x<1$: $1-s \le 1+xs \implies \frac{1-s}{1+xs} \le 1$

Basta dimostrare che $a_d \xrightarrow[d\to+\infty]{} 0$

Si dimostra usando il criterio del rapporto:

$$\frac{|a_{d+1}|}{|a_d|} = \left| \frac{\frac{a(a-1)\cdots(a-d-1)}{(d+1)!} x^{d+2}}{\frac{a(a-1)\cdots(a-d)}{d!} x^{d+1}} \right| = \left| \frac{a-d-1}{d+1} x \right| \xrightarrow[d\to+\infty]{} |-x| = |x| < 1$$

$$\implies |a_d| \xrightarrow[d\to+\infty]{} 0 \quad \text{e quindi} \quad a_d \xrightarrow[d\to+\infty]{} 0$$

esempio Serie di Taylor di $\log(x+1)$ è $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

Dimostrare che $R=1$

Dimostrare che la serie converge a $\log(1+x)$ per $-1<x\le 1$

(In particolare, si ottiene: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$)

esempio La serie di Taylor di $\frac{1}{1+x^2}$ è $1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$

- $R=1$

La serie di Taylor dell' arctan x è $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

- $R=1$
- la serie converge a arctan x per $-1\le x\le 1$

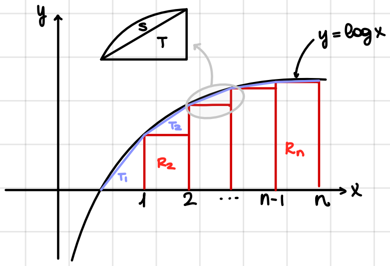
  In particolare $\frac{\pi}{4}=\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$

esempio Formula di Stirling: $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Dimostro che esiste c_0 t.c. $n!\sim c_0\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

OSS $\log n!=\log 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=\log 1+\log 2+\log 3+\ldots+\log n=\sum_{k=1}^{n}\log k$

$$\log n!=\sum_{k=1}^{n}\log k\sim\int_1^n\log x\,dx=\left|x(\log x-1)\right|_1^n=n(\log n-1)+1\sim n\log\left(\frac{n}{e}\right)=\log\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$$



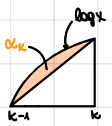
$$n(\log n-1)+1=\int_1^n\log x\,dx=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{\text{area}(R_k)}_{\log k}+\underbrace{\text{area}(T_k)}_{\frac{1}{2}[\log(k+1)-\log k]}+\underbrace{\text{area}(S_k)}_{\alpha_k}=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\log k\right)+\frac{1}{2}\left(\log n-\log 1\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\log k\right)-\frac{1}{2}\log n+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$

$$\log(n!)=\sum_{k=1}^{n}\log k=n(\log n-1)+\frac{1}{2}\log n+1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\log\left[\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]+1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$

$$n!=\exp\left(\log\left[\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]+1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\right)=\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\exp\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\right)\sim\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot c_0$$

con $c_0=\exp\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\right)$

Resta da dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k<+\infty$



$$y-\log k=\frac{\log k-\log(k-1)}{k-(k-1)}(x-k)\implies y=\log\left(\frac{k}{k-1}\right)(x-k)+\log k$$

$$\implies\alpha_k=\int_{k-1}^{k}\log x-\log\left(\frac{k}{k-1}\right)(x-k)-\log k\,dx=\frac{(2k-1)\log k}{2}+\frac{(1-2k)\log(k-1)}{2}-1$$
$$=\left(k-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{k}{k-1}\right)-1$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Un' equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n è nella forma

$$D^n x(t) + a_{n-1}(t) D^{n-1} x(t) + \dots + a_2(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = b(t) \qquad (*)$$

Il problema di Cauchy associato è : $\begin{cases} (*) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ D^{n-1}x(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$

Teorema di esistenza e unicità Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $t_0 \in I$ e siano tutti gli $a_i(t)$ $(i=0,\dots,n-1)$ definiti e continui su I. Allora esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy (PC) ed è definita su tutto I.

Teorema Sia $b(t) \equiv 0$ (ossia ODE lineare di ordine n omogenea). Sia X l'insieme delle soluzioni di $(*)$. Allora X è uno spazio vettoriale con $\dim X = n$

DIMOSTRAZIONE

Analoga al caso del II ordine. $\square$

corollario Se $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di soluzioni di $(*)$, allora la soluzione generale è

$$x_{om}(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) \quad \text{con } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

La soluzione generale della non omogenea è:

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$

con $\tilde{x}(t)$ soluzione particolare

ODE lineari di ordine n a coefficienti costanti omogenee

Vogliamo trovare una base di X

Step 1 : si scrive il polinomio caratteristico associato all'equazione

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Step 2 : si trovano le radici di $p(\lambda)$

Step 3 : costruire la base di X

(1) λ è una radice reale di molteplicità 1 $\rightsquigarrow e^{\lambda t}$

(2) λ è una radice reale di molteplicità m $\rightsquigarrow e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$

(3) $\alpha \pm i\beta$ due radici complesse coniugate di molteplicità 1 $\rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

(4) $\alpha \pm i\beta$ due radici complesse coniugate di molteplicità m $\rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), \dots, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$\frac{d}{dt} = D$

Vogliamo vedere D come operatore tra spazi di funzioni

$D: X \longrightarrow X$

$D: \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^0$ non va bene

$D: \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty$ $\quad D^2 = D \circ D \quad D^n = \overbrace{D \circ D \circ \ldots \circ D}^{n \text{ volte}} : X \longrightarrow X$

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_2 D^2 x + a_1 D x + a_0 x = b(t)$$

$L(x) = D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_2 D^2 x + a_1 D x + a_0 x$ con L operatore lineare

$P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \, Id$

Fattorizzo $P(D)$:

$$P(D) = (D - \lambda_1 Id)^{h_1} (D - \lambda_2 Id)^{h_2} \cdots (D - \lambda_k Id)^{h_k}$$

Vogliamo risolvere $L(x) = 0$

Introduco $L_i = (D - \lambda_i Id)^{h_i}$

Allora $L = L_1 \circ L_2 \circ \ldots \circ L_k = \bigcirc_{i=1}^{k} L_i$

esempio $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f(t)$

$L(x) = \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$

$P(D) = D^2 + 3D + 2Id = (D + Id)(D + 2Id) = (D + 2Id)(D + Id)$

Chiamo $L_1(x) = \dot{x} + 2x$, $L_2(x) = \dot{x} + x$

$L = L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$

$(L_1 \circ L_2)(x) = L_1(\dot{x} + x) = \ddot{x} + \dot{x} + 2\dot{x} + 2x = \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$

$(L_2 \circ L_1)(x) = L_2(\dot{x} + 2x) = \ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} + 2x = \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$

Se ho una soluzione di $L_1 = 0$, ho una soluzione di $L = 0$

ossia ho x t.c. $L_1(x) = 0$, ma allora $L(x) = L_2(L_1(x)) = L_2(0) = 0$

OSS i λ_i devono essere costanti, altrimenti non vale l'identità, poiché $D(\lambda_i(t) \circ Id) \neq \lambda_i(t) \circ D$

(1) Supponiamo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ di molteplicità 1

Risolviamo $D - \lambda_1 Id = 0$

$\dot{x} - \lambda_1 x = 0$: la soluzione è $x(t) = e^{\lambda_1 t}$

(2) λ_1 di molteplicità $m > 1$

$m = 2 \qquad (D - \lambda_1 Id)^2 = 0 \qquad (D - \lambda_1 Id)(D - \lambda_1 Id) = 0$

Si trova $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$. Cerco $x_2(t) \not\equiv 0$ soluzione di $(D - \lambda_1 Id)^2 = 0$ t.c. $(D - \lambda_1 Id)^2 x_2 \neq 0$

Sia $(D - \lambda_1) x_2 = v$

$0 = (D - \lambda_1 Id)(D - \lambda_1 Id) x_2 = (D - \lambda_1 Id) v \implies v = e^{\lambda_1 t} \implies (D - \lambda_1 Id) x_2 = e^{\lambda_1 t}$

$\dot{x}_2 - \lambda_1 x_2 = e^{\lambda_1 t} \implies x_2(t) = e^{\lambda_1 t} \left(\int e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 t} dt + \overset{=0}{c} \right) = e^{\lambda_1 t} \left(\int 1 \, dt \right) = t e^{\lambda_1 t}$

Analogamente, per molteplicità $m > 2$, si ha:

$\dot{x} - \lambda_i x = t^{k-2} e^{\lambda_i t} \implies x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_i t}$

fino a $x_m(t) = t^{m-1} e^{\lambda_i t}$

(1), (2) valgono anche per $\lambda \in \mathbb{C}$

Metodo degli annichilatori

Voglio risolvere $P(D)x = f$ quando f è soluzione di $Q(D)f = 0$ di ordine k

$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 Id$

$Q(D) = D^k + b_{k-1}D^{k-1} + \ldots + b_2 D^2 + b_1 D + b_0 Id$

$P(D)x = f \quad (*)$

$Q \cdot P(D)x = Q(D)f = 0 \quad (**)$

Come trovo una soluzione particolare di $P(D)x = f$?

Sia X_{QP}, spazio delle soluzioni di $QP(D)x = 0$ $(**)$ $(\dim X_{QP} = n+k)$

Sia X_P, spazio delle soluzioni di $P(D)x = 0$ $(\dim X_P = n)$

Sia $\mathcal{B}_P = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base di X_P

<u>OSS</u> Se $x \in X_P$ (ossia x è soluzione di $P(D)x = 0$)

allora $x \in X_{QP}$ (ossia x è soluzione di $QP(D)x = 0$)

Si completa $\mathcal{B}_P$ a $\mathcal{B}_{QP}$, base di X_{QP}:

$\mathcal{B}_{QP} = \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$

<u>OSS</u> Se x è soluzione di $P(D)x = f$,

allora x è soluzione di $QP(D)x = 0$

Allora possiamo scrivere x come:

$x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + c_{n+1}\bar{x}_1 + \ldots + c_{n+k}\bar{x}_k$

Notiamo che $x_{om} = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ è soluzione di $P(D)x_{om} = 0$

$\Rightarrow x - x_{om}$ è soluzione di $P(D)x = f$

$\tilde{x} = x - x_{om} = c_{n+1}\bar{x}_1 + \ldots + c_{n+k}\bar{x}_k$

Esiste una soluzione particolare $\tilde{x}$ di $P(D)x = f$ che è della forma

$\tilde{x} = c_{n+1}\bar{x}_1 + \ldots + c_{n+k}\bar{x}_k$, combinazione lineare dei vettori $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k \in \mathcal{B}_{QP} \setminus \mathcal{B}_P$

Termine noto $f(t)$	Annichilatore $Q(D)$
t^k	D^{k+1}
$t^k e^{\lambda t}$	$(D - \lambda Id)^{k+1}$
$t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ o $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2) Id)^{k+1}$

<u>esempio</u> $P = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$ $\quad \mathcal{B}_P = \{e^t, e^{-3t}\}$

$Q = (\lambda - 2)$ $\quad \mathcal{B}_Q = \{e^{2t}\}$ $\quad \mathcal{B}_{QP} = \{e^t, e^{2t}, e^{-3t}\}$

<u>esempio</u> $P = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$ $\quad \mathcal{B}_P = \{e^t, e^{-3t}\}$

$Q = (\lambda - 1)$ $\quad \mathcal{B}_Q = \{e^t\}$ $\quad \mathcal{B}_{QP} = \{e^t, te^t, e^{-3t}\}$

esempio $P(D) = (D - Id)^3 (D-2Id)^2 (D-4Id)$

$Q(D) = (D-Id)^2 (D-2Id)$

Scrivere $\mathcal{B}_P$, $\mathcal{B}_{QP}$ e dire di quale funzione è combinazione lineare una soluzione $\tilde{x}$ di $P(D)x = f$

$\mathcal{B}_P = \{e^t, te^t, t^2e^t, e^{2t}, te^{2t}, e^{4t}\}$

$QP(D) = (D-Id)^5 (D-2Id)^3 (D-4Id)$

$\mathcal{B}_{QP} = \{e^t, te^t, t^2e^t, t^3e^t, t^4e^t, e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}, e^{4t}\}$

$\tilde{x} = c_1 t^3e^t + c_2 t^4 e^t + c_3 t^2 e^{2t}$

esempio $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 4te^{3t}$

$P(D) = D^2 - 6D + 9Id = (D-3Id)^2$

Cerco x_{om}

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \longrightarrow \lambda = 3$ con molt. 2

$x_{om} = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}$

$Q(D) = (D-3Id)^2$

$\Rightarrow QP(D) = (D-3Id)^4$

$\mathcal{B}_P = \{e^{3t}, te^{3t}\}$

$\mathcal{B}_{QP} = \{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}, t^3e^{3t}\}$

Quindi $\tilde{x} = c_1t^2e^{3t} + c_2t^3e^{3t} = e^{3t}(c_1t^2 + c_2t^3)$

$\tilde{x}'(t) = 3e^{3t}(c_1t^2 + c_2t^3) + e^{3t}(c_1 \cdot 2t + c_2 \cdot 3t^2) = e^{3t}(2c_1t + 3(c_1+c_2)t^2 + 3c_2t^3)$

$\tilde{x}''(t) = 3e^{3t}(2c_1t + 3(c_1+c_2)t^2 + 3c_2t^3) + e^{3t}(2c_1 + 6(c_1+c_2)t + 9c_2t^2) =$

$= e^{3t}(2c_1 + (12c_1 + 6c_2)t + (9c_1 + 18c_2)t^2 + 9c_2t^3)$

$\cancel{e^{3t}}(2c_1 + (12c_1+6c_2)t + (9c_1+18c_2)t^2 + 9c_2t^3) - 6\cdot\cancel{e^{3t}}(2c_1t + 3(c_1+c_2)t^2 + 3c_2t^3) +$
$+ 9\cdot\cancel{e^{3t}}(c_1t^2 + c_2t^3) = 4t\cancel{e^{3t}}$

$\Rightarrow 2c_1 + 6c_2t = 4t \quad \Rightarrow c_1 = 0, \; c_2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \tilde{x} = \frac{2}{3}t^3e^{3t}$

$\Rightarrow x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{2}{3}t^3e^{3t}$

esempio $x''' - x = e^{2t}\sin t$

$x''' - x = 0$

$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \longrightarrow \lambda = 1$ molt. 1

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x(t) = c_1e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$Q(D) = D^2 - 4D + 5Id$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$\tilde{x}(t) = c_1e^{2t}\sin t + c_2e^{2t}\cos t = e^{2t}(c_1\sin t + c_2\cos t)$

$\tilde{x}'(t) = e^{2t}((2c_1 - c_2)\sin t + (2c_2 + c_1)\cos t)$

$\tilde{x}''(t) = e^{2t}((3c_1 - 4c_2)\sin t + (3c_2 + 4c_1)\cos t)$

$\tilde{x}'''(t) = e^{2t}((2c_1 - 11c_2)\sin t + (2c_2 + 11c_1)\cos t)$

$\cancel{e^{2t}}((2c_1 - 11c_2)\sin t + (2c_2 + 11c_1)\cos t) - \cancel{e^{2t}}(c_1\sin t + c_2\cos t) = \cancel{e^{2t}}\sin t$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - 11c_2 = 1 \\ c_2 + 11c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{122} \\ c_2 = -\frac{11}{122} \end{cases}$

esempio $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$$

Mostriamo che $f\in C^\infty$ e $D^n f(0)=0\ \forall n$

Mostriamo che $D^n(f)(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ con P_n di grado $3n$

Per induzione:

- $n=0$ $\quad P_0\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=1\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ ✓
- vera per n, vediamo

$$D^{n+1}(f)(x)=D(D^n(f)(x))=D\left(P_n\left(\tfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=P_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot-\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+P_n\left(\tfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}=$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(P_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot-\frac{1}{x^2}+P_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{n+1}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

f è continua (si controlla con i limiti in 0)

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}P_1\left(\tfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{c}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

Per induzione:

f è derivabile n volte con derivata n-esima 0 in zero

e con derivata n-esima continua

Per la derivata $n+1$-esima:

$$\lim_{x\to 0} D^{n+1}(f)=\lim_{x\to 0}P_{n+1}\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{c}{x^{3n+3}}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$